



ИЗДАТЕЛЬСТВО

**МОСКОВСКИЙ  
АВИАЦИОННЫЙ  
ИНСТИТУТ**

**УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ**

В.И. ШАЙДАКОВ

**АЭРОДИНАМИКА  
ВИНТА  
В КОЛЬЦЕ**

МОСКВА • 1996

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ КОМИТЕТ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
ПО ВЫСШЕМУ ОБРАЗОВАНИЮ

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ  
(технический университет)

---

**В.И. ШАЙДАКОВ**

## **АЭРОДИНАМИКА ВИНТА В КОЛЬЦЕ**

Учебное пособие

Утверждено  
на заседании редсовета  
25 октября 1995 г.

Москва  
Издательство МАИ  
1996

Шайдаков В.И. Аэродинамика винта в кольце: Учеб. пособие. — М.: Изд-во МАИ, 1996. — 88 с.: ил.

Излагается теория системы «винт в кольце». Исследуется аэродинамическое качество системы. Приводятся методы аэродинамического расчета несущей системы «винт в кольце» и винта в кольце, выполняющего роль движителя ЛА. Рассматривается теория решеток профилей в приложении к определению их аэродинамических характеристик, необходимых для расчета многолопастных винтов. Излагается метод учета влияния числа лопастей и зазора между стенками канала и концами лопастей на концевые потери тяги винта.

Пособие предназначено для студентов вертолетной и самолетной специальностей и может быть полезно инженерам, занимающимся проектированием и расчетом воздушных винтов.

Рецензенты: В.А. Головкин, В.А. Симоненко

Тем. план 1996, поз. 4

Шайдаков Владимир Иванович

## АЭРОДИНАМИКА ВИНТА В КОЛЬЦЕ

Редактор Е.Г. Ремнева

Техн. редактор В.Н. Горячева

Сдано в набор 07.02.96. Подписано в печать 25.06.96.

Бум. офсетная. Формат 60x84 1/16. Печать офсетная

Усл. печ. л. 5,11. Уч.-изд. л. 5,25. Тираж 300

Зак. 2165/1186. С. 78

Типография издательства МАИ

125871, Москва, Волоколамское шоссе, 4

ISBN 5-7035-1323-5

© Московский авиационный институт, 1996

## ВВЕДЕНИЕ

В последнее время проявляется большой интерес к летательным аппаратам (в том числе нетрадиционных схем), у которых в качестве подъемной системы применяется винтовая установка, встроенная в специально спрофилированный канал, а в качестве движительной — винт в кольце. К ним относятся летающие платформы и аппараты на воздушной подушке, появившиеся еще в 60-х годах<sup>\*</sup>, самолеты вертикального взлета и посадки с поворотными винтами в кольцах или встроенными в конструкцию крыльев подъемными вентиляторными установками [6], вертолеты комбинированных схем<sup>\*\*</sup>, самолеты и дирижабли с движительными установками «винт в кольце» и т.п. По схеме «винт в кольце» могут быть выполнены дистанционно пилотируемые летательные аппараты вертикального взлета и посадки специального назначения (например, аппарат фирмы Сикорского CYPHER)<sup>\*\*\*</sup>.

Кроме того, на некоторых вертолетах одновинтовых схем в качестве рулевых устройств применяются встроенные в киль винты (фенестроны), обладающие рядом преимуществ по сравнению с обычным рулевым винтом [14].

Как видим, спектр применения системы «винт в кольце» на аппаратах различных схем и различного назначения довольно широк. Однако аэродинамика этих систем еще не достаточно изучена как теоретически, так и экспериментально. Данное учебное пособие в какой-то мере восполняет этот пробел. В пособие включены результаты теоретических исследований автора, опубликованные в работах [12, 13, 14]. Кроме того, сюда вошли новые разработки методов аэродинамического расчета системы «винт в кольце» в режимах осевой и косоугольной обдувки, а также в условиях работы винта в кольце с зазором между концами лопастей и стенками канала. Эти материалы публикуются впервые. Недостаток экспериментальных данных не позволяет провести полную проверку предлагаемых методов, поэтому они должны

\* Ружицкий Е.И. Воздушные вездеходы. — М.: Машиностроение, 1964.

\*\* Филимонов А.И., Униченко Г.И. Альтернативный воздушный транспорт // Гражданская авиация. 1991. № 7, 8.

\*\*\* VERTIFLITE. — 1992, May, June.

рассматриваться как первый научный опыт в этом направлении. Однако опубликованные ранее методы для режимов работы на месте и осевой обдувки получили экспериментальное подтверждение и применяются в промышленности.

## 1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ ЖИДКОСТИ

В этом разделе будут получены уравнения движения и энергии для случая пространственного течения жидкости, рассматриваемой как движущаяся сплошная среда, вступающая в силовое взаимодействие с помещенными в нее твердыми телами. Уравнения движения жидкости и моментов количества движения получены в 1755 г. Эйлером. Они лежат в основе гидродинамики — науки, изучающей движение жидкостей в условиях, когда справедливы законы классической механики Ньютона.

Уравнения приведены к форме, удобной для последующего их применения в теории воздушного винта.

### 1.1. Уравнения движения жидкости

Выберем в потоке замкнутую контрольную поверхность  $S$ , ограничивающую жидкий объем  $\tau$  так, что в момент времени  $t$  контрольная поверхность (сплошная линия) и граница жидкого объема (пунктирная линия) совпадают (рис. 1.1.1). Интегральное уравнение движения для выделенного жидкого объема получим как обобщение второго закона механики о движении материальной частицы на весь объем:

$$\int_{\tau} \frac{d}{dt} (\rho \vec{V} d\tau) = \frac{d}{dt} \int_{\tau} \rho \vec{V} d\tau = \vec{R}_{\Sigma}, \quad (1.1.1)$$

где  $\rho, \vec{V}$  — соответственно плотность и скорость движения жидкости внутри объема  $\tau$ ;  $\rho \vec{V} d\tau$  — количество движения элементарного объема жидкости;  $\frac{d}{dt} \int_{\tau} \rho \vec{V} d\tau$  — полная производная по времени от век-

тора суммарного количества движения жидкого объема;  $\vec{R}_{\Sigma}$  — вектор равнодействующей всех внешних массовых и поверхностных сил, действующих на жидкий объем в момент времени  $t$ .

Согласно третьему закону механики силы взаимодействия между частицами жидкости внутри объема  $\tau$  взаимно уравновешиваются. Остаются неуравновешенными лишь силы, действующие на частицы, которые находятся на поверхности  $S$ . Поэтому равнодействующая  $\vec{R}_{\Sigma}$

равна сумме внешних массовых сил  $\vec{R}_m$  (например, силы тяжести  $\vec{F}$ ) и поверхностных сил  $\vec{R}_S$ , действующих на жидкую поверхность. Однако поскольку в момент времени  $t$  жидкая поверхность совпадает с контрольной поверхностью  $S$ , то в дальнейшем удобнее считать, что суммирование ведется по контрольной поверхности.

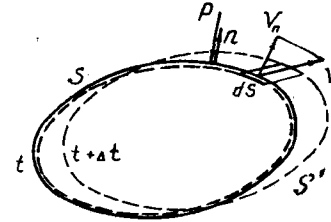


Рис. 1.1.1

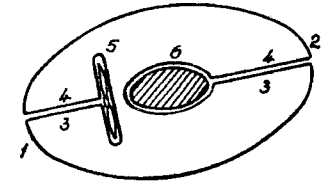


Рис. 1.1.2

В общем случае жидкий объем может включать в себя не только жидкие частицы, но и твердые тела (рис. 1.1.2), как неподвижные 6, так и подвижные 5 (например, лопасти винтов, ветряков), производящие обмен энергией между жидкостью и внешней средой. В таком случае к выделенной контрольной поверхности 1, 2 следует добавить внутренние участки 3, 4, 5, 6, вырезающие части объема, занятые твердыми телами. При этом расходы жидкости через эти выделенные участки контрольной поверхности равны нулю, поскольку твердые тела непроницаемы для жидкости, а на участках, соединяющих внешнюю контрольную поверхность с телами, количество вытекающей жидкости равно количеству вытекающей.

Таким образом, в поверхностные силы следует включить как силы  $\vec{R}_S$ , действующие на контрольную поверхность  $S$ , так и силы, с которыми твердые тела, содержащиеся внутри контрольного объема, действуют на жидкость. Эти силы равны по абсолютной величине и обратны по знаку силам реакции, с которой жидкость действует на обтекаемые ею тела.

Обозначим суммарный вектор сил реакции через  $\vec{R}$ , тогда

$$\vec{R}_{\Sigma} = \vec{R}_m + \vec{R}_S - \vec{R}. \quad (1.1.2)$$

Теперь интегральное уравнение движения жидкого объема примет вид



$$\frac{d}{dt} \int_{\tau} \rho \vec{V} d\tau = \vec{R}_m + \vec{R}_S - \vec{R} = \vec{R}_\Sigma. \quad (1.1.3)$$

Таким образом, производная по времени суммарного количества движения жидкого объема равна сумме всех внешних сил, действующих на этот объем.

Уравнение (1.1.3) является самым общим уравнением динамики жидкости и газа. Оно применимо для произвольного объема и любого движения жидкости, при котором параметры жидкости (например, скорости и давления) могут претерпевать разрыв как внутри контрольного объема, так и на его поверхности. Это уравнение является основным для расчета сил, действующих в движущейся жидкости.

Преобразуем полную производную по времени вектора суммарного количества движения жидкого объема. Изменение количества движения частиц жидкости в объеме  $\tau$  за интервал времени  $\Delta t \rightarrow 0$  определяется:

— изменением количества движения частиц жидкости в самом объеме, т.е. частной производной количества движения по времени  $t$ :  $\frac{\partial}{\partial t} \int_{\tau} \rho \vec{V} d\tau$ . Заметим, что в установившемся движении эта величина равна нулю;

— изменением потока количества движения через поверхность  $S$  при ее переходе за время  $\Delta t$  в поверхность  $S'$  (рис. 1.1.1), т.е. разностью между секундными количествами движения жидкости, вытекающей из контрольного объема и втекающей в него:  $\int_S \rho (\vec{V} \cdot \vec{n}) \vec{V} dS$ , где

$\vec{n}$  — орт внешней нормали к поверхности  $S$ , а  $(\vec{V} \cdot \vec{n}) = V_n$  проекция скорости  $\vec{V}$  на нормаль к поверхности  $S$ .

Поток вектора количества движения через поверхность  $S$  определяется разностью количеств движения на выходе из контрольной поверхности и на входе в нее:

$$\int_S \rho (\vec{V} \cdot \vec{n}) \vec{V} dS = \int_{S_{\text{вых}}} \rho V_n \vec{V} dS - \int_{S_{\text{вх}}} \rho V_n \vec{V} dS. \quad (1.1.4)$$

Таким образом,

$$\frac{d}{dt} \int_{\tau} \rho \vec{V} d\tau = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\tau} \rho \vec{V} d\tau + \int_S \rho (\vec{V} \cdot \vec{n}) \vec{V} dS = \vec{R}_\Sigma, \quad (1.1.5)$$

где  $\vec{R}_\Sigma$  определяется выражением (1.1.2).

Отсюда следует первая теорема Эйлера: равнодействующая внешних сил  $\vec{R}_\Sigma$ , действующих в данный момент на жидкость в контрольном объеме, равна изменению во времени суммарного количества движения жидкости в этом объеме (частная производная по времени) плюс разность потоков количества движения жидкости на выходе из контрольного объема и на входе в него.

В дальнейшем будем рассматривать установившееся движение идеальной жидкости, поэтому в уравнении (1.1.5)  $\frac{\partial}{\partial t} \int_{\tau} \rho \vec{V} d\tau = 0$ , а в выражении (1.1.2) из поверхностных сил  $\vec{R}_S$ , действующих на контрольную поверхность  $S$ , учтем только силы давления (рис. 1.1.1). Сила давления  $p$  действует по направлению внутренней нормали к поверхности  $S$ , поэтому результирующая сил давления будет

$$\vec{R}_S = - \int_S p \vec{n} dS, \quad (1.1.6)$$

где  $\vec{n}$  — орт внешней нормали.

Кроме того, будем пренебрегать внешними массовыми силами, рассматривая воздух как невесомую жидкость:  $\vec{R}_m = 0$ .

Тогда для принятых условий получим

$$\vec{R}_\Sigma = - \int_S p \vec{n} dS - \vec{R} = \int_S \rho \vec{V} (\vec{V} \cdot \vec{n}) dS \quad (1.1.7)$$

или

$$\vec{R}_\Sigma = - \int_S p \vec{n} dS - \vec{R} = \int_{S_{\text{вых}}} \rho \vec{V} V_n dS - \int_{S_{\text{вх}}} \rho \vec{V} V_n dS. \quad (1.1.8)$$

Уравнение (1.1.8) или (1.1.5) отражает закон сохранения импульсов в механике сплошной среды и является важнейшим уравнением динамики жидкости, позволяющим определить суммарные силы взаимодействия между жидкостью и обтекаемыми телами в тех случаях, когда задача определения этих сил путем непосредственного интегрирования по поверхности тел нормальных и касательных напряжений представляет непреодолимые трудности.

В установившемся движении при известных или отсутствующих массовых силах искомые силы могут быть определены только по состоянию потока на входном и выходном участках контрольной поверхности. При этом очень важно произвести правильный выбор контрольной поверхности. Так, например, если внутрь контрольного объ-

ема попадут интересующие нас тела, а интеграл давлений по контрольной поверхности будет равен нулю, то результирующая сила реакции жидкости на обтекаемые ею тела будет обратна по знаку и равна по абсолютной величине приросту вектора секундного количества движения жидкости, протекающей через контрольную поверхность.

В практических расчетах интегральное уравнение движения жидкости удобнее использовать в проекциях на оси координат. В проекциях на ось  $x$  это уравнение записывается следующим образом:

$$R_{\Sigma x} = - \left( \int_S p \vec{n} dS \right)_x - R_x = \int_{S_{\text{вых}}} \rho V_x V_n dS - \int_{S_{\text{вх}}} \rho V_x V_n dS. \quad (1.1.9)$$

Аналогично записываются уравнения в проекциях на оси  $y$  и  $z$ .

Интегральное уравнение движения жидкости особенно широко используется в теории лопаточных машин и теории реактивных двигателей.

Применительно к установившемуся течению в элементарной (или конечной) струйке уравнение (1.1.8) может быть записано в виде (рис.1.1.3)

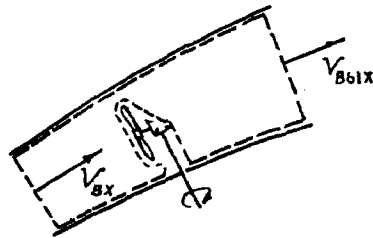


Рис. 1.1.3

$$\vec{R}_{\Sigma} = - \left( \vec{R} + \int_S p \vec{n} dS \right) = m \vec{V}_{\text{вых}} - m \vec{V}_{\text{вх}} = m (\vec{V}_{\text{вых}} - \vec{V}_{\text{вх}}), \quad (1.1.10)$$

$$m = \int_{S_n} \rho V_n dS = \text{const}, \quad (1.1.11)$$

$m$  — секундный массовый расход жидкости, вычисленный по любому сечению струйки;  $S_n$  — площадь нормального сечения струйки;  $\vec{R}_{\Sigma}$  — импульс сил давлений, приложенных к поверхности контрольного объема жидкости, взятого между входным и выходным сечениями струйки, плюс импульс сил реакции для тел, находящихся в струе (например, вентилятор в канале или воздушный винт в свободной струе).

При рассмотрении свободной воздушной струи интеграл давлений в уравнении (1.1.10) удобнее вычислять через избыточные давления

$p - p_a$ , где  $p_a$  — атмосферное давление. Учитывая, что  $\int_S p_a \vec{n} dS = 0$ , получаем

$$\vec{R}_{\Sigma} = - \vec{R} - \int_S (p - p_a) \vec{n} dS = m (\vec{V}_{\text{вых}} - \vec{V}_{\text{вх}}). \quad (1.1.12)$$

## 1.2. Уравнение моментов количества движения жидкости

Уравнение моментов количества движения является другой формой представления уравнения движения, в которой вместо сил и количеств движения фигурируют моменты сил и моменты количества движения. Это уравнение удобно для исследования вращательного движения жидкости и является одним из основных в теории лопаточных машин.

Как и для твердого тела, уравнение моментов количества движения для жидкого объема устанавливает, что момент равнодействующей внешних сил относительно произвольной оси равен полной производной по времени от суммарного момента количества движения относительно той же оси, т.е. применительно к контрольному объему жидкости

$$\vec{M}_{\Sigma} = \frac{d}{dt} \int_{\tau} \rho (\vec{V} \times \vec{r}) d\tau,$$

где  $\vec{M}_{\Sigma}$  — суммарный момент от внешних сил относительно произвольной оси;  $\vec{r}$  — радиусы-векторы элементарных масс, имеющих скорости  $\vec{V}$ ;  $\rho (\vec{V} \times \vec{r}) d\tau$  — момент количества движения массы жидкости в объеме  $d\tau$ .

Расчетная форма уравнения может быть получена при рассмотрении движения жидкого объема в интервале времени  $\Delta t \rightarrow 0$  (см. рис. 1.1.1) так же, как и при выводе уравнения количества движения (1.1.8). Проведя аналогичные рассуждения, получим уравнение моментов количества движения для контрольного объема в векторной форме:

$$\vec{M}_{\Sigma} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\tau} \rho (\vec{V} \times \vec{r}) d\tau + \int_{S_{\text{вых}}} \rho (\vec{V} \times \vec{r}) V_n d\tau - \int_{S_{\text{вх}}} \rho (\vec{V} \times \vec{r}) V_n d\tau.$$

Отсюда следует вторая теорема Эйлера: сумма моментов всех внешних сил, приложенных к жидкости в контрольном объеме относительно произвольной оси, равна частной производной по времени суммарного момента количества движения этой жидкости плюс раз-

ность суммарных секундных моментов количеств движения на выходе из контрольного объема и на входе в него относительно той же оси.

Для установившегося движения

$$\vec{M}_\Sigma = \int_{S_{\text{вых}}} \rho (\vec{V} \times \vec{r}) V_n dS - \int_{S_{\text{вх}}} \rho (\vec{V} \times \vec{r}) V_n dS.$$

Теперь получим уравнение моментов количества движения для конечного участка элементарной струйки при установившемся течении относительно оси  $y$ . Для этого спроектируем на плоскость  $xz$  равнодействующую всех внешних сил, действующих на жидкость в контрольном объеме, и скорости на входе в контрольный объем и выходе из него. Тогда получим аналог плоского течения (рис. 1.2.1). Разложим скорости на радиальные  $v_r$  и тангенциальные  $v_u$  (или окружные  $u$ ) составляющие. Учитывая, что моменты количества движения относительно оси  $y$  определяются только окружными составляющими скорости, из уравнения (1.1.12) получаем наиболее простую и

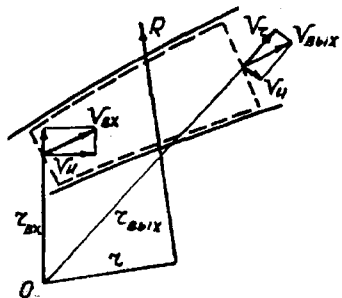


Рис. 1.2.1

часто употребляемую форму:

$$M_y = Rr = m \left[ (ur)_{\text{вых}} - (ur)_{\text{вх}} \right]. \quad (1.2.1)$$

Отсюда следует, что в установившемся движении момент равнодействующей внешних сил, приложенных к конечному участку струйки относительно произвольной оси, равен приращению момента секундного количества движения жидкости на выделенном участке струйки относительно той же оси.

Если момент внешних сил относительно данной оси равен нулю ( $M_y = 0$ ), то прирост момента секундного количества движения отсутствует и жидкость вращается по инерции, подчиняясь закону потенциального вихря  $ur = \text{const}$  для любого сечения струйки или  $u = \text{const}/r$ .

### 1.3. Уравнение Бернулли

Рассмотрим простейший случай течения жидкости в отсутствии массовых сил ( $\vec{R}_m = 0$ ) и сил реакции  $\vec{R} = 0$ . В этом случае на конт-

рольную поверхность действуют только внешние силы давления  $\vec{R}_S$ . Учитывая выражение (1.1.6) для  $\vec{R}_S$ , уравнение (1.1.3) запишем в виде

$$\int_S p \vec{n} dS + \int_\tau \rho \frac{d\vec{V}}{dt} d\tau = 0. \quad (1.3.1)$$

Будем считать, что параметры движения и их первые производные непрерывны в области  $\tau$  и на ее границе  $S$ . Тогда к интегралу давлений можно применить преобразование Остроградского-Гаусса:

$$\int_S p \vec{n} dS = \int_\tau \text{grad } p d\tau.$$

Подставив этот интеграл в уравнение (1.3.1), получим

$$\int_\tau \left( \text{grad } p + \rho \frac{d\vec{V}}{dt} \right) d\tau = 0.$$

При произвольном выборе объема  $\tau$  данное уравнение выполняется только при равенстве нулю подынтегрального выражения:

$$\text{grad } p + \rho \frac{d\vec{V}}{dt} = 0, \quad (1.3.2)$$

отсюда

$$-\frac{1}{\rho} \text{grad } p = \frac{d\vec{V}}{dt}.$$

Мы получили дифференциальное уравнение движения невесомой идеальной жидкости в векторной форме.

Рассмотрим теперь установившееся течение жидкости внутри трубки тока (в струйке). Выберем направление  $\vec{l}$ , совпадающее с вектором скорости  $\vec{V}$ . Единичный вектор этого направления  $\vec{l}^{\vec{\delta}} = \vec{l} / |\vec{l}|$ . Умножим скалярно левую и правую части уравнения (1.3.2) на единичный вектор  $\vec{l}^{\vec{\delta}}$ :

$$-\frac{1}{\rho} (\text{grad } p \cdot \vec{l}^{\vec{\delta}}) = \left( \frac{d\vec{V}}{dt} \cdot \vec{l}^{\vec{\delta}} \right).$$

На основании свойств градиента скалярного поля в левой части уравнения получим производную  $p$  по направлению  $\vec{l}$ . В правой части, учитывая, что векторы  $\vec{V}$  и  $\vec{l}^{\vec{\delta}}$  коллинеарны, получим производную  $\frac{dV}{dt}$ :

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial l} = \frac{dV}{dt}.$$

Скорость  $V$  меняется в направлении  $\vec{l}$  вдоль струйки, поэтому для установившегося движения

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial l} \frac{dl}{dt} = V \frac{\partial V}{\partial l} = \frac{\partial \left( \frac{V^2}{2} \right)}{\partial l}.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial l} + \frac{\partial \left( \frac{V^2}{2} \right)}{\partial l} = 0.$$

Данное уравнение может быть решено для баротропного течения ( $\rho = f(p)$ ). В частном случае несжимаемой жидкости  $\rho = \text{const}$ . Тогда после интегрирования получим

$$p + \frac{\rho V^2}{2} = \text{const}. \quad (1.3.3)$$

Это соотношение дает связь между параметрами установившегося течения в струйке (или вдоль линии тока) и называется уравнением Бернулли.

Напомним, что рассматривалось течение без обмена энергией с внешней средой. Для двух ортогональных сечений струйки 1-1 и 2-2 это уравнение обычно записывают в виде

$$p_1 + \frac{\rho V_1^2}{2} = p_2 + \frac{\rho V_2^2}{2} = p_0, \quad (1.3.4)$$

где  $p_0$  — полная механическая энергия массы жидкости в объеме одного кубического метра или полный напор (Дж/м<sup>3</sup>, Па).

Составляющими полной механической энергии жидкости являются:  $p$  — потенциальная энергия давления (Па) и  $\frac{\rho V^2}{2}$  — кинетическая энергия жидкости или скоростной динамический напор.

Потенциальная энергия давления может превращаться в кинетическую, а при обмене энергией с внешней средой — расходоваться на совершение внешней работы или затрачиваться на преодоление сопротивлений (см. разд. 1.4).

Энергетический смысл уравнения Бернулли в форме (1.3.3) выражается в законе сохранения полной механической энергии единицы массы несжимаемой жидкости в пределах элементарной трубки тока (струйки)\*.

В практических расчетах уравнение Бернулли приближенно применяют к течению в трубках тока конечного сечения (в том числе и в каналах). При этом изменение кинетической энергии жидкости не может задаваться произвольно, а находится в соответствии с уравнением неразрывности течения (уравнением расходов) (1.1.11):

$$m = \rho V S_n = \text{const}.$$

Рассматривая совместно уравнение Бернулли для элементарной струйки и уравнение неразрывности, приходим к выводу, что картина линий тока при течении несжимаемой жидкости однозначно определяет скорость и статическое давление, т.е. при сгущении линий тока скорости увеличиваются, при разрежении — наоборот. Это правило широко используется при анализе движения жидкости и ее взаимодействия с телами.

Заметим, что уравнения Бернулли и неразрывности имеют смысл лишь до тех пор, пока минимальное давление в струйке остается больше нуля.

#### 1.4. Интегральное уравнение энергии

При выводе интегрального уравнения движения жидкого объема (1.1.3) мы предполагали, что это движение может происходить при обмене механической энергией с внешней средой. Как было показано в разделе 1.3, полная механическая энергия массы жидкости в единичном объеме будет  $p + \frac{\rho V^2}{2}$ . Для контрольного объема в момент времени  $t$  эта энергия составит

$$E_t = \int_{\tau} \left( p + \frac{\rho V^2}{2} \right) d\tau.$$

Перемещение этого объема за время  $\Delta t$  будет сопровождаться изменением энергии на величину  $\Delta E_t$ . В соответствии с законом со-

\* При потенциальном (безвихревом) течении уравнение (1.3.3) распространяется на всю область течения, а при вихревом — справедливо вдоль линии тока и вихревой линии.



хранения энергии  $\Delta E_t$ , подведенная к жидкому объему за время  $\Delta t$ , равна приросту энергии этого объема за то же время. Тогда

$$L = \frac{dE_t}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{\tau} \left( p + \frac{\rho V^2}{2} \right) d\tau,$$

где  $L$  — энергия, подводимая к жидкому объему в единицу времени, или мощность источника энергии.

Делая те же рассуждения, что и при выводе уравнения количества движения, для установившегося течения несжимаемой жидкости получим

$$L = \int_{S_{\text{вых}}} \left( p + \frac{\rho V^2}{2} \right) V_n dS - \int_{S_{\text{вх}}} \left( p + \frac{\rho V^2}{2} \right) V_n dS. \quad (1.4.1)$$

Обобщая полученное уравнение и на случай отвода энергии, сформулируем теорему: количество энергии, которой жидкость, протекающая через контрольный объем, обменивается с внешней средой в условиях установившегося течения, равно разности полных энергий секундных расходов жидкости на выходе из контрольного объема и на входе в него.

Рассмотрим уравнение энергии для конечного участка струи при установившемся течении несжимаемой жидкости

$$L = \left[ \left( p_{\text{вых}} + \frac{\rho V_{\text{вых}}^2}{2} \right) - \left( p_{\text{вх}} + \frac{\rho V_{\text{вх}}^2}{2} \right) \right] Q, \quad (1.4.2)$$

где  $Q$  — секундный объемный расход жидкости по сечению струи,

$$Q = \int_{S_{\text{вых}}} V_n dS = \int_{S_{\text{вх}}} V_n dS = \text{const}.$$

В частных случаях если  $p_{\text{вых}} = p_{\text{вх}}$ , то

$$L = \frac{m V_{\text{вых}}^2}{2} - \frac{m V_{\text{вх}}^2}{2}, \quad (1.4.3)$$

где  $m = \rho Q$  (см. (1.1.11)).

Если  $V_{\text{вых}} = V_{\text{вх}}$ , то

$$L = (p_{\text{вых}} - p_{\text{вх}}) Q. \quad (1.4.4)$$

Последний случай соответствует работе вентилятора в канале или воздушного винта в свободной струе (рис. 1.4.1). Действительно, если расчетные сечения выбрать в непосредственной близости перед вентилятором и за ним и пренебречь потерями энергии на закручивание потока за вентилятором, то осевая скорость при переходе через плоскость вентилятора будет изменяться непрерывно, а давление — скачком. Для выбранных расчетных сечений величина  $p_{\text{вых}} - p_{\text{вх}} = p$  определяет напор вентилятора, а  $Q$  — расход, и тогда

$$L = p Q. \quad (1.4.5)$$

Эта формула справедлива как для свободно работающего вентилятора, так и заключенного в кожух.

Для воздушного винта формулу вентиляторной мощности перепишем в следующем виде:

$$L = p F V_{\text{пр}} = T V_{\text{пр}}, \quad (1.4.6)$$

где  $F$  — площадь диска винта;  $T$  — его тяга;  $V_{\text{пр}}$  — скорость протекания воздуха через винт.

Формулы (1.4.5) и (1.4.6) определяют требуемую мощность на привод вентилятора или воздушного винта, работающих в идеальной жидкости, без учета затрат энергии на трение лопастей о воздух и закручивание струи за винтом.

В этом случае мощность называется идеальной.

Если энергию, вносимую в поток из внешней среды, отнести к единице объема жидкости  $l = L / Q$ , то в соответствии с (1.4.2) уравнение Бернулли для расчетных сечений трубки тока (струи) будет

$$p_{\text{вх}} + \frac{\rho V_{\text{вх}}^2}{2} = p_{\text{вых}} + \frac{\rho V_{\text{вых}}^2}{2} \pm l. \quad (1.4.7)$$

В случае притока энергии на выделенном участке струи в правой части уравнения следует брать  $(-l)$ , а в случае потери энергии —  $(+l)$ . Так, например, если на рассматриваемом участке струи располагается вентилятор (воздушный винт), то уравнение (1.4.7) без учета затрат энергии на закручивание потока принимает вид

$$p_{\text{вх}} + \frac{\rho V_{\text{вх}}^2}{2} = p_{\text{вых}} + \frac{\rho V_{\text{вых}}^2}{2} - p, \quad (1.4.8)$$

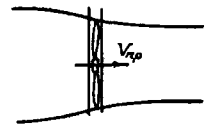


Рис. 1.4.1

т.е. для расчетного сечения струи, взятого за вентилятором, из полной энергии следует отнять напор вентилятора  $p = T/F = L/Q$ .

### 1.5. Потери давления в местных сопротивлениях

Уравнение (1.4.7) используется в расчетах воздушных (гидравлических) сетей, в которых потери давления в воздухопроводах возникают при изменении скорости или направления движения потока. Эти потери называют местными сопротивлениями. Они представляют собой затраты энергии на образование и поддержание вихрей в вязкой жидкости.

К простейшим видам местных сопротивлений относятся внезапное и постепенное расширение или сужение канала, поворот канала, плавный вход в канал или вход в трубу с острыми кромками и т.д. Кроме того, существуют потери на трение жидкости о стенки канала. В последующих задачах потери на трение мы не будем учитывать ввиду их малости.

Коэффициентом местного сопротивления называют отношение потери давления в данном местном сопротивлении  $p_{м.с}$  к скоростному напору в выбранном сечении:

$$\xi = p_{м.с} / \frac{\rho V^2}{2}. \quad (1.5.1)$$

В качестве расчетного сечения обычно выбирается наиболее суженное поперечное сечение канала, но с обязательным указанием выбранного места (на схеме это место полезно пометить стрелкой). Величина  $\xi$  зависит от формы местного сопротивления, от режима течения и числа Рейнольдса. При турбулентном режиме течения коэффициент местного сопротивления практически не зависит от числа Рейнольдса, поскольку потери давления в этом случае в основном обусловлены вихреобразованием, а не трением.

Обычно потери давления в местных сопротивлениях определяются опытным путем. Однако в некоторых случаях возможно и аналитическое определение. Для этого используются уравнение количества движения (1.1.10), уравнение расходов (1.1.11) и уравнение Бернулли (1.4.7).

Для выбранных расчетных сечений канала 1-1 и 2-2, между которыми располагается местное сопротивление, уравнение Бернулли записывается в виде

$$p_1 + \frac{\rho V_1^2}{2} = p_2 + \frac{\rho V_2^2}{2} + p_{м.с}. \quad (1.5.2)$$

Это уравнение является основным в проектировании воздушных (гидравлических) сетей, содержащих различные местные сопротивления. Например, работа винта в канале с коллектором на входе и диффузором на выходе может рассматриваться как воздушная сеть с местными сопротивлениями.

Ниже рассмотрены случаи потерь давления в местных сопротивлениях: при внезапном расширении канала, в диффузоре, на входе в канал.

#### 1.5.1. Потери давления при внезапном расширении потока

В течении, имеющем внезапное расширение потока, последний не сразу заполняет расширенное сечение воздухопровода, образуя область вихревого движения жидкости (рис. 1.5.1). На ее образование расходуется значительное давление  $p$ , называемое потерей давления на удар, которое можно определить аналитически.

Для этого запишем уравнение Бернулли для двух сечений 1-1 и 2-2, указанных на рис. 1.5.1:

$$p_1 + \frac{\rho V_1^2}{2} = p_2 + \frac{\rho V_2^2}{2} + p,$$

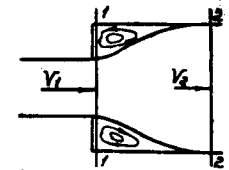


Рис. 1.5.1

откуда

$$p = \frac{\rho}{2} (V_1^2 - V_2^2) - (p_2 - p_1).$$

Применительно к контрольному объему жидкости, взятому между этими же сечениями, запишем уравнение количества движения (импульса сил)

$$(p_2 - p_1) F_2 = m (V_1 - V_2),$$

где  $m = \rho F_1 V_1 = \rho F_2 V_2$ .

Тогда  $(p_2 - p_1) = \rho V_2 (V_1 - V_2)$  и, следовательно,

$$p = \frac{\rho}{2} (V_1^2 - V_2^2) - \rho V_2 (V_1 - V_2).$$

После преобразований эта формула принимает вид

$$p = \frac{\rho}{2} (V_1 - V_2)^2, \quad (1.5.3)$$

т.е. потеря давления на удар равна скоростному напору от потерянной скорости. Соотношение (1.5.3) называют теоремой Борда - Карно.

Коэффициент местного сопротивления на удар при внезапном расширении потока, если отнести его к скоростному напору в узком сечении, будет

$$\xi = \frac{\rho}{2} (V_1 - V_2)^2 / \frac{\rho}{2} V_1^2 = \left(1 - \frac{V_2}{V_1}\right)^2 = \left(1 - \frac{F_1}{F_2}\right)^2. \quad (1.5.4)$$

Для случая выхода воздуха в свободное пространство  $F_2 = \infty$  и  $\xi = 1$ .

### 1.5.2. Потери давления в диффузоре

В тех случаях, когда необходимо с наименьшими потерями в воздуховоде снизить скорость потока, применяют плавно расширяющиеся по направлению движения потока участки трубы — диффузоры (рис. 1.5.2). Установка диффузоров особенно выгодна в местах выпуска потока в атмосферу, поскольку при снижении скорости потока уменьшается потеря на выход. Геометрические параметры диффузоров определяются центральным углом раскрытия (углом раствора)  $\alpha_d$  и степенью расширения  $n = F_2 / F_1$ .

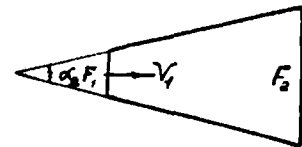


Рис. 1.5.2

Не рекомендуется применять диффузоры с центральным углом раствора более 12°. Это объясняется возможностью отрыва потока от стенки диффузора из-за значительного продольного градиента давления, вызванного нарастанием по длине диффузора статического давления. Потерю давления в диффузоре можно рассматривать как уменьшенную (смягченную) потерю на удар. Поэтому коэффициент местного сопротивления, отнесенный к скоростному напору на входе в диффузор, может быть определен по формуле

$$\xi_d = k_{см} (1 - F_1 / F_2)^2 = k_{см} (1 - 1/n)^2, \quad (1.5.5)$$

где  $k_{см}$  — коэффициент смягчения, зависящий от угла раствора диффузора, его типа и состояния потока на входе в диффузор.

Для конического диффузора с равномерным распределением скоростей турбулентного потока на входе и угле раствора  $\alpha_d < 40^\circ$  может быть использована эмпирическая формула [5]

$$k_{см} = 3,2 \left( \operatorname{tg} \frac{\alpha_d}{2} \right)^{3/4}. \quad (1.5.6)$$

### 1.5.3. Потери давления на вход

Рассмотрим сначала простейший случай входа потока в прямую трубу с острой кромкой (рис. 1.5.3). Так как частицы жидкости движутся по криволинейным траекториям, возникают центробежные силы, которые отрывают поток от стенок трубы. Это влечет за собой сужение и последующее расширение потока, с которым связаны потери на удар. Наибольшее поджатие потока имеет место на расстоянии 0,4 диаметра от входа, а полное его расширение до размеров диаметра трубы наблюдается на расстоянии около четырех диаметров.

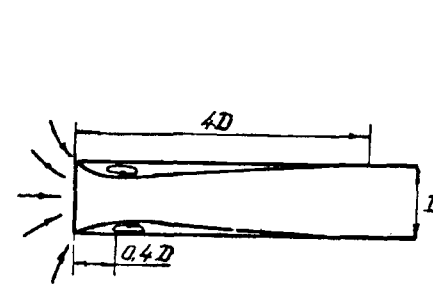


Рис. 1.5.3

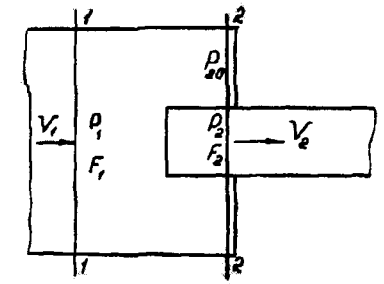


Рис. 1.5.4

Для определения потерь давления на входе в трубу с острой кромкой рассмотрим общий случай, когда она расположена в камере большого поперечного сечения. Запишем уравнение Бернулли для двух выбранных на рис. 1.5.4 сечений:

$$p_1 + \frac{\rho V_1^2}{2} = p_2 + \frac{\rho V_2^2}{2} + p,$$

откуда

$$p = (p_1 - p_2) - \frac{\rho}{2} (V_2^2 - V_1^2).$$

Для объема, заключенного между этими двумя сечениями, запишем уравнение импульса сил

$$p_1 F_1 - (p_2 F_2 + p_{20} (F_1 - F_2)) = m (V_2 - V_1),$$

где  $m = \rho F_1 V_1 = \rho F_2 V_2$ ;  $p_{20}$  — давление у торцевой стенки камеры, на которой происходит полное торможение потока:  $p_{20} = p_1 + \frac{\rho V_1^2}{2}$ .

После подстановок и преобразований из уравнения импульсов имеем

$$p_1 - p_2 = \rho V_2^2 - \frac{\rho}{2} V_1^2 - \frac{\rho}{2} V_1 V_2.$$

Подставим полученное выражение в уравнение потери давления. Тогда

$$p = \frac{\rho}{2} V_2 (V_2 - V_1).$$

Коэффициент местного сопротивления получим, относя потери давления к скоростному напору в сечении трубы:

$$\xi = \frac{\rho}{2} V_2 (V_2 - V_1) / \frac{\rho}{2} V_2^2 = (1 - V_1 / V_2) = 1 - F_2 / F_1. \quad (1.5.7)$$

При бесконечно большом поперечном сечении камеры имеем  $F_1 = \infty$  и  $\xi = 1$ , что соответствует свободному входу потока в трубу с острыми кромками.

В общем случае, когда поток входит в трубу без острых кромок,

$$\xi = k_{см} (1 - F_2 / F_1), \quad (1.5.8)$$

где  $k_{см}$  — коэффициент смягчения, определяемый опытным путем.

Например, при входе потока из свободного пространства в трубу, заделанную заподлицо в стенку,  $k_{см} = 0,5$ ,  $F_1 = \infty$  и, следовательно,  $\xi = 0,5$ .

Для значительного уменьшения потерь давления на вход применяют специальные устройства — коллекторы, обеспечивающие плавный вход потока в трубу. Потери в коллекторе обусловлены его формой, размерами, качеством выполнения, наличием заделки в стенку. Подробные исследования коллекторов, профилированных по дуге окружности, выполнены В.И. Ханжонковым [10]. На рис. 1.5.5 представлен экспериментальный график для коэффициентов сопротивления  $\xi_{кол}$  в зависимости от относительного радиуса кривизны профилиро-

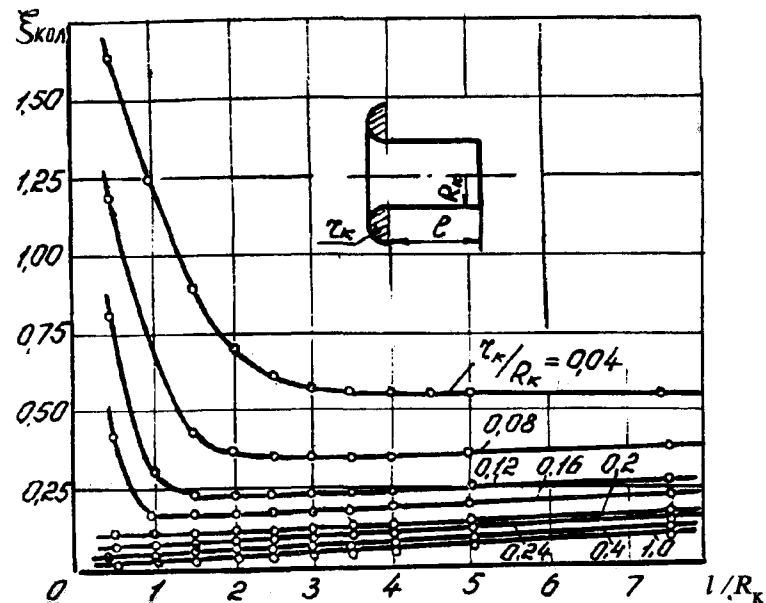


Рис. 1.5.5

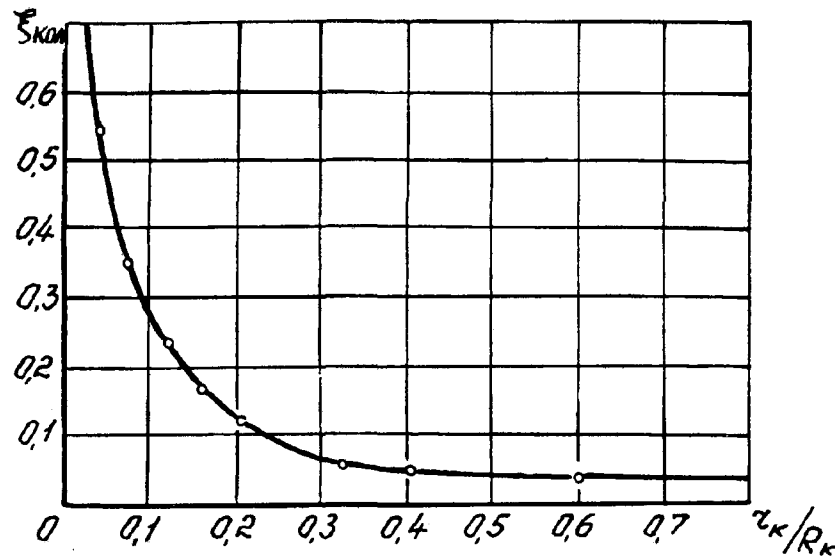


Рис. 1.5.6

ванной поверхности  $\bar{r}_k = r_k/R$  и относительной длины патрубка за коллектором  $\bar{l} = l/R$ . Из графика следует, что при малых  $\bar{r}_k$  и малой длине патрубка поток не успевает выровняться по сечению трубы, что ведет к росту коэффициента  $\xi_{\text{кол}}$ . При  $\bar{r}_k \geq 0,2$  длина патрубка практически не влияет на коэффициент местных потерь. Поэтому при профилировании коллектора для  $\bar{r}_k < 0,2$  длина воздуховодов за коллектором должна быть такой, чтобы обеспечить выравнивание потока, снижающее потери на входе в канал в соответствии с графиком рис. 1.5.5.

На рис. 1.5.6 представлено изменение коэффициента потерь в коллекторе в зависимости от относительного радиуса кривизны его поверхности, полученное при соблюдении условий, при которых поток на входе полностью выравнивается.

В практике проектирования воздушных сетей кроме рассмотренных здесь встречаются и другие виды местных сопротивлений, потери давления в которых определяются с помощью коэффициентов местных сопротивлений. Их можно найти в специальных справочниках [4].

Обычно в справочниках приводятся экспериментальные данные о коэффициентах местных сопротивлений применительно к движению жидкости с нормальным или выровненным полем скоростей. В действительности местные сопротивления могут располагаться очень близко одно к другому так, что поток между ними не успевает нормализоваться. Поэтому применяемый в практике расчетов гидравлических сетей метод суперпозиции или простого суммирования местных сопротивлений даст правильный результат лишь в том случае, если сопротивления будут расположены на расстояниях, превышающих длину взаимного влияния.

## 2. ТЕОРИЯ ИДЕАЛЬНОГО ВИНТА В КОЛЬЦЕ

Теория идеального винта рассматривает винт как активный диск бесконечно малой толщины, способный поддерживать по обе стороны от себя разность давлений и, потребляя энергию, сообщать ускорение протекающему сквозь него воздуху. Вследствие этого образуется воздушная струя. В этом случае активный диск получает энергию от внешнего источника, которую полностью (без потерь) передает воздушной струе. Сам винт (активный диск) может работать в присутствии внешних и внутренних устройств, создающих под действием воздушного потока силы тяги или сопротивления в зависимости от назначения этих устройств (кольцо с коллектором и диффузором, входная решетка, воздушные рули в канале и т.д.).

Если известны гидравлические потери этих устройств, то «винт в кольце» можно рассматривать как воздушную сеть, составленную из местных сопротивлений. И тогда, применяя к выделенному контрольному объему жидкости интегральные уравнения сохранения импульсов (количества движения), энергии и массы, можно установить соотношения, определяющие взаимовлияние винта и кольца, а также связь между потребляемой активным диском мощностью и создаваемой им тягой. Эти соотношения оказываются очень полезными при оценке энергетических и тяговых возможностей системы «винт в кольце» в зависимости от ее параметров. Однако теория не отвечает на вопрос, каким должен быть винт, обеспечивающий заданную тягу при минимальных энергетических затратах. Иными словами, теория идеального винта не позволяет спроектировать сам винт, работающий в канале, поскольку он рассматривается как некоторый отвлеченный объект, способный создавать силу тяги, потребляя мощность.

Теория винта в кольце рассматривалась автором в работах [12, 13, 14]. Здесь, кроме выполненных ранее, даются и новые результаты исследований.

### 2.1. Постановка задачи. Основные параметры системы «винт в кольце». Допущения

На рис. 2.1.1 изображен общий вид системы «винт в кольце» в простейшем случае, когда коллектор спрофилирован по дуге окружности, а диффузор выполнен в виде отрезка конической трубы. Лопасти воздушного винта трапециевидные, сужающиеся к концу, закрученные по нелинейному закону. Введем следующие условные обозначения для геометрических характеристик кольца и винта:  $R$  — радиус винта;  $r_0$  — радиус втулки винта;  $R_n$  — наружный радиус кольца;  $R_k$  — радиус канала в месте установки винта;  $r_k$  — радиус закругления входной кромки (радиус кривизны коллектора);  $\alpha_d$  — угол раствора диффузора;  $H_d$  — длина диффузора;  $H_n$  — длина переходной части между коллектором и диффузором;  $F$  — площадь активного диска;  $F_1$  — площадь проходной части канала в плоскости вращения винта;  $F_2$  — площадь выходной части канала;  $n = F_2/F_1$  — степень расширения диффузора;  $\delta = R_k - R$  — зазор между концами лопастей винта и стенками канала;  $k_n$  — число лопастей винта;  $b$  — хорда лопасти (в характерном сечении  $b_7$ );  $\sigma = kb/\pi R$  — заполнение винта (в характерном сечении  $\sigma_7$ );  $\eta_n$  — сужение лопасти (отношение корневой хорды

к концевой);  $\varphi$  — угол установки сечения лопасти (в характерном сечении  $\varphi_7$ );  $\Delta\varphi = \varphi - \varphi_7$  — угол крутки лопасти.

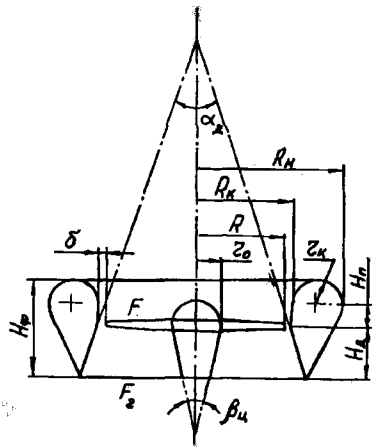


Рис. 2.1.1

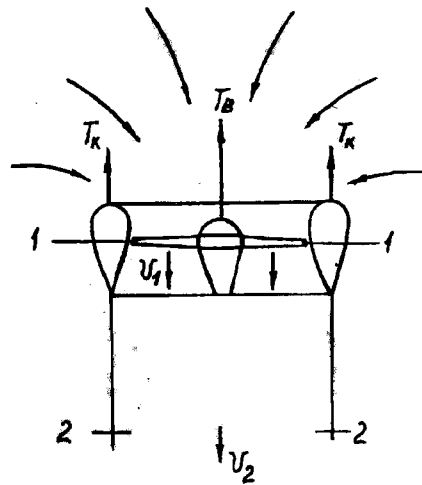


Рис. 2.1.2

Поскольку в теории идеального винта сам винт представляется в виде активного диска, то из числа перечисленных параметров параметры лопастей в этой теории не используются.

Рассматривается работа системы «винт в кольце» на месте и в условиях осевой обдувки. Воздух, подсасываемый винтом, обтекает коллектор, вследствие чего на его поверхности возникает разрежение и создается подъемная сила. Проходя через диффузор, струя воздуха расширяется и по выходе из него принимает цилиндрическую форму. На рис. 2.1.2 показаны характерные сечения струи 1-1 и 2-2. Приближенно принимается, что площадь струи в сечении 2-2 равна площади выходной части канала. В реальных условиях, когда угол раствора диффузора не превышает  $12^\circ$ , площадь уходящей струи примерно на 5% больше выходной площади диффузора, что не оказывает существенного влияния на результат.

При изучении системы «винт в кольце» будем использовать следующие обозначения:  $T$  — суммарная сила тяги системы «винт в кольце»;  $T_{\text{кол}}$  — сила тяги, возникающая при обтекании коллектора;  $T_{\text{д}}$  — сила тяги, возникающая при обтекании диффузора;  $T_{\text{к}}$  — суммарная сила тяги кольца;  $T_{\text{в}}$  — сила тяги винта;  $v_1$  — скорость подсасывания,

или индуктивная скорость в плоскости диска винта;  $v_2$  — скорость отбрасывания, или индуктивная скорость в уходящей струе;  $V$  — скорость невозмущенного потока;  $V_1 = V + v_1$  — скорость протекания в плоскости вращения винта;  $V_2 = V + v_2$  — суммарная скорость в уходящей струе;  $k_V = \frac{V_2}{V_1} \approx \frac{1}{n}$  — коэффициент, определяющий соотношение скоростей в струе (на режиме работы на месте  $k_V = v_2 / v_1$ );  $L$  — потребляемая винтом мощность, Вт;  $N$  — та же мощность, кВт;  $\eta_0$  — относительный КПД винта;  $K = T/T_{\text{из}}$  — качество идеальной системы «винт в кольце»;  $p$  — удельная нагрузка на ометаемую винтом площадь;  $C_T, m_k$  — аэродинамические коэффициенты силы тяги и мощности винта;  $J_v$  — коэффициент индукции, обусловленный неравномерностью распределения индуктивных скоростей по радиусу винта;  $\xi_u$  — коэффициент потерь на закручивание струи;  $\varepsilon$  — потери, обусловленные наличием зазора между концами лопастей и стенками канала.

Если силу тяги кольца и винта определять в долях от суммарной силы тяги системы, тогда очевидны следующие соотношения:

$$\bar{T}_{\text{к}} = \frac{T_{\text{к}}}{T}; \quad \bar{T}_{\text{в}} = \frac{T_{\text{в}}}{T}; \quad \bar{T}_{\text{к}} + \bar{T}_{\text{в}} = 1; \quad \bar{T}_{\text{к}} = \bar{T}_{\text{кол}} + \bar{T}_{\text{д}}; \quad T = \frac{T_{\text{в}}}{\bar{T}_{\text{в}}} = \frac{T_{\text{к}}}{\bar{T}_{\text{к}}}. \quad (2.1.1)$$

Для идеальной системы «винт в кольце» введем следующие допущения.

1. Жидкость идеальная, несжимаемая. Струя, создаваемая воздушным винтом, вследствие отсутствия сил вязкости распространяется до бесконечности, а потери на трение лопастей о воздух отсутствуют. (При переходе к реальному винту считается, что жидкость идеальна всюду, кроме области, занятой пограничным слоем на лопастях.)
2. Закручивание потока в струе за винтом отсутствует (не учитывается).
3. Скорости потока в расчетных сечениях струи постоянны.
4. Площадь активного диска равна площади, ометаемой лопастями винта (при переходе к реальному винту исключается площадь, занятая втулкой, и соответствующая площадь, обусловленная наличием концевых потерь винта в канале).
5. Течение в канале происходит с гидравлическими потерями.
6. Выполняется условие неразрывности течения.

Теория применима только к тем режимам работы винта, где образуется четко выраженная воздушная струя. Такими режимами явля-



ются работа на месте (для подъемной системы — режим висения) и обдувка спереди потоком в направлении оси винта (осевая обдувка).

## 2.2. Режим работы на месте

Найдем суммарную тягу системы, применив уравнение импульсов.

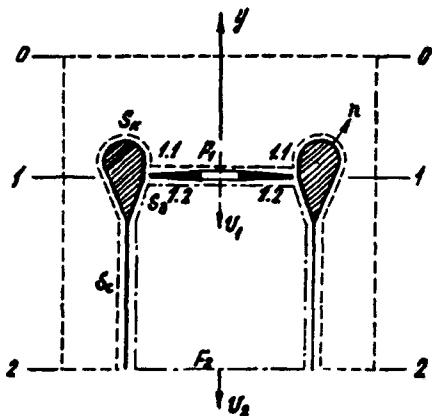


Рис. 2.2.1

суммарная тяга системы будет

$$T = T_k + T_b = mv_2 = \frac{v_2}{v_1} mv_1 = k_V m v_1, \quad (2.2.1)$$

$$m = \rho F_1 v_1 \approx \rho F v_1, \quad (2.2.2)$$

где  $m$  — секундный массовый расход воздуха в канале (ввиду малости зазора  $\delta$  можно считать, что  $F_1 \approx F$ ).

Будем рассматривать систему «винт в кольце» как воздушную сеть, составленную из местных сопротивлений, дающих суммарные по-

тери динамического напора в канале  $\xi_k \frac{\rho v_1^2}{2}$ . Здесь в качестве контрольного сечения выбрано сечение 1-1 в плоскости вращения винта. Суммарный коэффициент местных сопротивлений включает в себя по-

тери на входе в канал (коллектор)  $\xi_{кол}$ , потери в диффузоре  $\xi_d$  и прочие потери от внутренних устройств:

$$\xi_k = \xi_{кол} + \xi_d + \xi_{пр}. \quad (2.2.3)$$

Потери на трение воздуха о стенки канала можно не учитывать ввиду их малости по сравнению с профильными потерями самого винта [14].

Запишем уравнение Бернулли для сечений 0-0 и 2-2 воздушной струи, имея в виду, что приток энергии от активного диска, отнесенной к единице объема протекающего воздуха, равен скачку давлений  $p$  в сечениях струи 1.1-1.1, 1.2-1.2 (удельная нагрузка на диск винта). В соответствии с уравнением (1.4.7)

$$p_a = p_a + \frac{\rho v_2^2}{2} - p + \xi_k \frac{\rho v_1^2}{2},$$

откуда

$$p = \rho v_1^2 \cdot \frac{1}{2} \left( \frac{v_2^2}{v_1^2} + \xi_k \right) = \rho v_1^2 \cdot \frac{1}{2} \left( k_V^2 + \xi_k \right).$$

Умножим левую и правую части равенства на площадь диска винта  $F$  и определим силу тяги винта:

$$T_b = pF = k_b m v_1; \quad k_b = \frac{1}{2} \left( k_V^2 + \xi_k \right). \quad (2.2.4)$$

Сила тяги кольца найдется из (2.2.1) и (2.2.4):

$$T_k = T - T_b = k m v_1; \quad k = \frac{1}{2} \left( 2k_V - k_V^2 - \xi_k \right), \quad (2.2.5)$$

где  $k$  — коэффициент формы кольца. В частности, для цилиндрического диффузора  $k_V = 1$ ,  $\xi_d = 0$ ,  $\xi_k = \xi_{кол}$  и  $k = 0,5(1 - \xi_{кол}) < 0,5$ . Эта формула получена В.И. Ханжонковым [11].

Запишем выражение для относительной тяги винта и кольца, используя формулы (2.1.1), (2.2.4), (2.2.5):

$$\bar{T}_b = \frac{k_b}{k_V} = \frac{1}{2k_V} \left( k_V^2 + \xi_k \right); \quad \bar{T}_k = \frac{k}{k_V} = \frac{1}{2k_V} \left( 2k_V - k_V^2 - \xi_k \right). \quad (2.2.6)$$

Из (2.2.6) видно, что тяга кольца при установке диффузора возрастает, т.к.  $k_V < 1$ . Записывая уравнение Бернулли для различных сечений струи, находим относительную тягу коллектора и диффузора:

$$\bar{T}_{\text{кол}} = \frac{1}{2k_V} (1 - \xi_{\text{кол}}); \quad \bar{T}_d = -\frac{1}{2k_V} (\xi_d + (1 - k_V)^2). \quad (2.2.7)$$

Как видим, сила тяги коллектора возрастает, а сам диффузор дает силу сопротивления. Следовательно, должны существовать оптимальные углы раствора диффузора, обеспечивающие максимальную эффективность кольца.

Формулы (2.2.4), (2.2.5) и (2.2.6) при известных гидравлических потерях в канале позволяют найти распределение тяги системы между винтом и кольцом.

Для примера рассмотрим систему «винт в кольце» без дополнительных внутренних устройств. Полагая, что кольцо дает выровненный поток в плоскости винта, определяем коэффициенты местных сопротивлений по графику на рис. 1.5.6 и формулам (1.5.5), (1.5.6). Тогда по формулам (2.2.5) и (2.2.6) можно вычислить коэффициент формы кольца, а также относительную тягу винта и кольца.

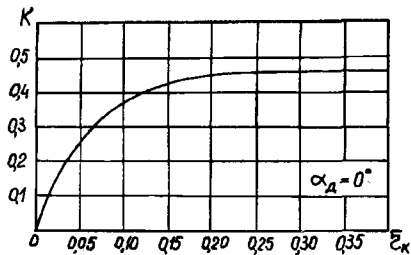


Рис. 2.2.2

На рис. 2.2.2 приведен график зависимости коэффициента формы кольца от относительного радиуса кривизны коллектора для кольца с цилиндрическим диффузором ( $\alpha_d = 0$ ). На рис. 2.2.3 представлен график относительной силы тяги кольца в зависимости от радиуса кривизны коллектора и относительной длины диффузора с углом раствора  $\alpha_d = 12^\circ$ . Как видим, несущая способность кольца с увеличением радиуса кривизны коллектора сильно растет до  $\bar{r}_k = 0,2$  и составляет в среднем 50% от общей тяги системы. Дальнейшее увеличение  $\bar{r}_k$  не дает ее заметного роста и в этом случае коллектор

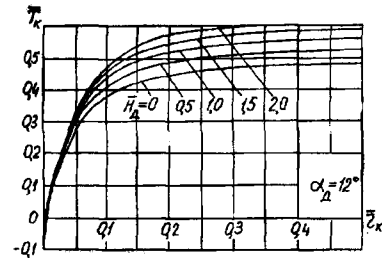


Рис. 2.2.3

близок к идеальному, поскольку потери на входе в канал малы. Увеличение длины диффузора, а следовательно, и степени его расширения  $n = \left(1 + \bar{H}_d \operatorname{tg} \frac{\alpha_d}{2}\right)^2$  ведет к увеличению несущей способности кольца во всем диапазоне  $\bar{r}_k$ , т.к. растет разрежение на поверхности коллектора.

На рис. 2.2.4 изображен график относительной силы тяги кольца с  $\bar{r}_k = 0,2$  в зависимости от угла раствора и длины диффузора. Из графика видно, что максимальная несущая способность кольца имеет место при углах  $\alpha_d = 15 \dots 30^\circ$ . Однако это не значит, что данные параметры диффузора оптимальны. Этот вопрос решается только на основе энергетического анализа всей системы. Заметим, что углы  $\alpha_d > 12^\circ$  требуют специальных мероприятий по предотвращению отрыва пограничного слоя от стенок диффузора.

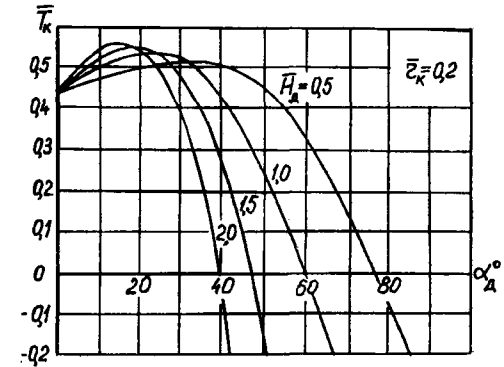


Рис. 2.2.4

Определим скорость подсосывания  $v_1$  в режиме работы на месте, которая является средней скоростью протекания воздушного потока сквозь диск винта. В идеальных условиях, когда отсутствует зазор между концами лопастей и стенками канала, а следовательно, отсутствуют и концевые потери винта, скорость  $v_1$  может быть определена из соотношений (2.2.1), (2.2.2) и (2.1.1):

$$v_1 = \sqrt{\frac{T}{\rho k_V F}} = a \sqrt{\frac{T_B}{2\rho F}}, \quad (2.2.8)$$

где

$$a = \sqrt{\frac{2}{\bar{T}_B k_V}} \quad (2.2.9)$$

Коэффициент  $a$  учитывает увеличение скорости подсосывания из-за установки кольца. В частности, для кольца в виде цилиндрической трубы с острыми кромками на входе ( $\bar{r}_k = 0$ ,  $\alpha_d = 0$ ) получим  $\bar{T}_B = 1$ ,

$k_V = 1$  и, следовательно,  $a = \sqrt{2}$ , т.е. скорость подсосывания увеличивается в 1,41 раза. Однако при этом несколько возрастают и затраты мощности на привод винта из-за потерь на входе в канал. Этим объясняется, почему при проектировании вентиляторов для увеличения их производительности винт устанавливают в канал с профилированным входом. Здесь преследуется другая цель: спроектировать систему «винт в кольце», развивающую при заданной мощности максимальную суммарную силу тяги.

В формуле (2.2.8) для реального винта с втулкой радиуса  $r_0$  при отсутствии зазора  $\delta$  площадь диска винта

$$F = \pi R^2 (1 - \bar{r}_0^2). \quad (2.2.10)$$

Для идеального винта, как было условлено,  $F = \pi R^2$ . Идеальная мощность, потребляемая винтом, работающим в канале, определится как вентиляторная мощность:

$$L_{\text{и}} = T_{\text{в.и}} v_{1\text{и}} = T_{\text{и}} \bar{T}_{\text{в}} v_{1\text{и}}. \quad (2.2.11)$$

Подставим сюда формулу (2.2.8) для идеального винта и разрешим полученное уравнение относительно суммарной тяги  $T_{\text{и}}$ :

$$T_{\text{и}} = \sqrt[3]{\frac{k_V}{2T_{\text{в}}^2}} \left( \sqrt{2\rho\pi R^2} L_{\text{и}} \right)^{2/3}. \quad (2.2.12)$$

Эта формула по аналогии с изолированным винтом может быть названа формулой силы тяги со степенью  $2/3$  системы «винт в кольце». Назовем множитель перед скобкой качеством системы «винт в кольце», которое показывает, во сколько раз изменяется тяга идеальной системы, если винт заключить в кольцо:

$$K = \sqrt[3]{\frac{k_V}{2T_{\text{в}}^2}}. \quad (2.2.13)$$

Входящее сюда значение  $\bar{T}_{\text{в}}$  при известных параметрах кольца  $\bar{r}_k$ ,  $\alpha_d$ ,  $l$  рассчитывается по формуле (2.2.6). На рис. 2.2.5 представлен график качества идеальной системы в зависимости от радиуса кривизны коллектора и длины диффузора с углом раствора  $\alpha_d = 12^\circ$ . Из графика видно, что в случае коллектора с острыми кромками ( $\bar{r}_k = 0$ ), когда потери на входе велики вследствие отрыва струи от стенок канала (см. рис. 1.5.3), система «винт в кольце» развивает меньшую тягу, чем изолированный винт. Причем тем меньшую, чем больше длина диффузора, который при  $\alpha_d = 12^\circ$  дает силу сопротивления. При

$\bar{r}_k \approx 0,1$  длина диффузора практически не влияет на качество. Ее влияние начинает заметно проявляться при  $\bar{r}_k > 0,15$ . Увеличение  $\bar{r}_k > 0,2$  и  $\bar{H}_d > 1$  не рационально, поскольку это дает несущественный прирост качества. На рис. 2.2.6 приведен график изменения качества системы в зависимости от угла раствора диффузора и его длины для  $\bar{r}_k = 0,2$ . Из графика видно, что рекомендуемый угол раствора диффузора  $\alpha_d = 10 \dots 12^\circ$ , обеспечивающий безотрывное истечение струи из диффузора, лежит в зоне максимального качества системы.

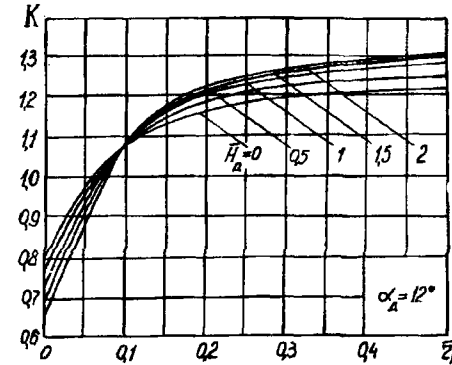


Рис. 2.2.5

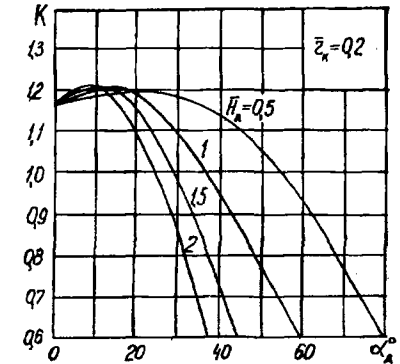


Рис. 2.2.6

Формула (2.2.12) дает соотношение между идеальной тягой и мощностью системы «винт в кольце». Перейдем к реальному винту, предположив, что жидкость идеальна всюду, кроме области пограничного слоя на лопастях. Тогда к идеальной мощности  $L_{\text{и}}$  следует добавить мощность, идущую на преодоление сил трения на лопастях (профильные потери) (см. допущение 1, раздел 2.1). Мощность на преодоление сил трения о поверхность кольца учтена в опытным значении коэффициента  $\xi_{\text{хол}}$ . Трение в диффузоре по малости может не учитываться. Кроме того, следует учесть дополнительные затраты мощности, связанные с потерями на закручивание струи за винтом, с неравномерностью потока по площади диска винта, с концевыми и втулочными потерями тяги (допущения 2, 3, 4, раздел 2.1).

Теория идеального винта не позволяет вычислить указанные затраты мощности в зависимости от параметров лопастей. Поэтому их учет осуществим посредством введения относительного КПД  $\eta_0$ , определяемого соотношением

$$\eta_0 = \frac{L_{\text{н}}}{L} = \frac{T_{\text{в}} v_{1\text{н}}}{L} = \frac{a T_{\text{в}}^{3/2}}{L \sqrt{2\rho\pi R^2}}. \quad (2.2.14)$$

Подставив в (2.2.12)  $L_{\text{н}} = L \eta_0$ , получим формулу силы тяги со степенью 2/3 реальной системы «винт в кольце»:

$$T = K \left( \sqrt{2\rho\pi R^2} \eta_0 L \right)^{2/3}. \quad (2.2.15)$$

Сделаем подстановку  $R = \frac{1}{2} D$ ,  $D$  — диаметр винта,  $\rho = \rho_0 \Delta$ ,  $\Delta = \rho / \rho_0$  — относительная плотность воздуха,  $\rho_0 = 1,225 \text{ кг/м}^3$  — плотность воздуха у земли в условиях стандартной атмосферы. Тогда

$$T = K (1,39 \sqrt{\Delta} D L \eta_0)^{2/3}; \quad T = K (43,9 \sqrt{\Delta} D N \eta_0)^{2/3}. \quad (2.2.16)$$

В первой формуле сила тяги  $T$  выражена в ньютонах, мощность  $L$  — в ваттах, во второй формуле тяга  $T$  — в данах, мощность  $N$  — в киловаттах.

До сих пор мы рассматривали случай, когда лопасти примыкали к стенкам трубы без зазора. В действительности такой зазор всегда есть, что существенно сказывается на характеристиках всей системы «винт в кольце». В зависимости от технологии исполнения зазор  $\delta$  может составить 0,5...1,5% и более от радиуса винта. С увеличением зазора падает сила тяги винта (или вентиляторный напор) ввиду увеличения потерь на перетекание воздуха в зазоре. Будем оценивать относительные потери напора вентилятора с помощью коэффициента  $\epsilon = p_{\delta} / p_0$ . Его максимальная величина равна 1 при  $\delta = 0$ , а минимальная (при  $\delta = \infty$ ) соответствует концевым потерям изолированного винта (см. формулу (5.3.20) и рис. 5.3.11).

Приблизительно в той же пропорции падает и тяга кольца, поскольку при малых зазорах она определяется разрежением перед винтом. Для цилиндрического диффузора эта пропорция выполняется строго. Следовательно,

$$\bar{T}_{\text{к}} = \epsilon \bar{T}_{\text{к}0}; \quad \bar{T}_{\text{в}} = 1 - \bar{T}_{\text{к}} = \epsilon \bar{T}_{\text{в}0} + (1 - \epsilon). \quad (2.2.17)$$

Уменьшение эффективности кольца при наличии зазора ведет к падению качества системы «винт в кольце» в соответствии с формулой (2.2.13), в которую следует подставлять  $\bar{T}_{\text{в}}$ , вычисленное с учетом зазора. Методика вычисления коэффициента  $\epsilon$  дана в разделе 5.3.

Как уже отмечалось, теория идеального винта не позволяет вычислить относительный КПД системы в зависимости от конструктивных параметров винта и кольца. Для этого необходимо рассмотреть теорию винта в канале, изложение которой дается в разделе 3.

### 2.3. Режим осевой обдувки

В режиме осевой обдувки невозмущенный поток набегаает в направлении оси системы «винт в кольце». Само кольцо начинает испытывать сопротивление от встречного потока и его относительная сила тяги  $\bar{T}_{\text{к}}$  падает. На рис. 2.3.1 показана струйная расчетная схема системы, откуда видно, что на передней кромке кольца (на коллекторе) возникает критическая точка, поэтому все течение может быть разделено на два потока: внутренний, проходящий через кольцо и образующий воздушную струю, и внешний, обтекающий внешнюю поверхность кольца. При этом на внутренней поверхности кольца создается сила тяги или сопротивления в зависимости от скорости набегающего потока, на внешней — всегда сила сопротивления, обусловленная действием нормальных и касательных напряжений.

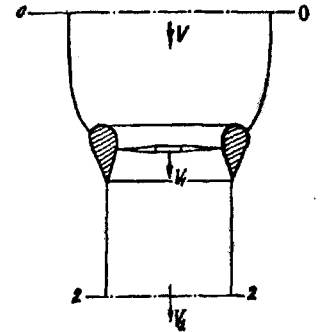


Рис. 2.3.1

Проведем контрольные сечения струи: 0-0 — далеко перед винтом, где скорость невозмущенного потока  $V$ , 1-1 — в плоскости диска винта, где скорость протекания  $V_1 = V + v_1$ , и 2-2 — далеко за кольцом, где давление равно атмосферному, а скорость струи  $V_2 = V + v_2$ . Скорости  $v_1$  и  $v_2$  — соответственно скорость подсосывания и скорость отбрасывания воздуха, обусловленные совместным индуктивным воздействием винта и кольца.

Применим уравнение импульсов к воздушной струе, имея в виду, что сила тяги кольца  $T_{\text{к}}$  создается внутренним участком его поверхности от критической точки на коллекторе до задней кромки на выходе из диффузора (сила сопротивления внешнего участка должна учитываться отдельно):

$$T = m (V_2 - V) = m (k_V V_1 - V);$$

$$m = \rho F V_1 = \frac{1}{k_V} \rho F V_2; \quad k_V = \frac{V_2}{V_1} = \frac{1}{n}. \quad (2.3.1)$$

Здесь  $T$  — суммарная тяга винта и внутреннего участка кольца,  $T = T_B + T_K$ .

Разрешим (2.3.1) относительно  $V_1$ :

$$V_1 = \frac{1}{2k_V} \left( V + \sqrt{V^2 + \frac{4Tk_V}{\rho F}} \right) = \frac{1}{2k_V} \left( V + \sqrt{V^2 + \frac{4k_V T_B}{\rho F \bar{T}_B}} \right). \quad (2.3.2)$$

Отнесем все скорости к  $\sqrt{\frac{T}{\rho k_V F}}$ , т.е. к скорости подсосывания  $v_{10}$  в режиме работы на месте:  $\bar{V}_1 = V_1 / v_{10}$ ;  $\bar{V} = V / v_{10}$ . Тогда из (2.3.2) получим

$$\bar{V}_1 = \frac{1}{2k_V} \left( \bar{V} + \sqrt{\bar{V}^2 + 4k_V^2} \right). \quad (2.3.3)$$

На рис. 2.3.2 представлена зависимость  $\bar{V}_1(\bar{V}, \bar{H}_d)$  при  $\alpha_d = 12^\circ$ , откуда видно, что увеличение степени расширения диффузора ведет к относительному росту скорости протекания.

Для нахождения относительной тяги винта  $\bar{T}_B$  запишем уравнение Бернулли для сечений струи 0-0 и 2-2:

$$p_a + \frac{\rho V^2}{2} = p_a + \frac{\rho V_2^2}{2} - p + (\xi_{вх} + \xi_d) \frac{\rho V_1^2}{2}.$$

Отсюда

$$T_B = m V_2 k_B;$$

$$k_B = \frac{1}{2k_V} (k_V^2 (1 - \hat{V}^2) + \xi_{вх} + \xi_d), \quad (2.3.4)$$

где  $\hat{V} = V / V_2$ . Учитывая, что из (2.3.1)  $T = m V_2 (1 - \hat{V})$ , находим относительную тягу винта

$$\bar{T}_B = T_B / T = \frac{k_B}{1 - \hat{V}} = \frac{k_V^2 (1 - \hat{V}^2) + \xi_{вх} + \xi_d}{2k_V (1 - \hat{V})}. \quad (2.3.5)$$

Очевидно, что в формуле (2.3.5) коэффициент местных потерь в диффузоре  $\xi_d$  не зависит от скорости набегающего потока, т.к. определяется только степенью расширения диффузора, в то время как потери на входе  $\xi_{вх}$  в коллектор будут уменьшаться с увеличением скорости  $\hat{V}$ , поскольку в уравнении Бернулли учитываются потери только его внутреннего участка (от критической точки до диска винта), который уменьшается с увеличением  $\hat{V}$ . Оценим эти потери, приняв  $k_V = 1$ ,  $\xi_d = 0$ . Для входа в коллектор с острой кромкой  $\bar{T}_B = 1$ , тогда из (2.3.5)  $\xi_{вх} = (1 - \hat{V})^2$ . Учитывая, что при  $\hat{V} = 0$  имеем  $\xi_{вх} = \xi_{кол}$ , для кольца с закругленным коллектором примем

$$\xi_{вх} = \xi_{кол} (1 - \hat{V})^2. \quad (2.3.6)$$

Подставляя (2.3.6) в (2.3.5) и учитывая (2.2.6), получаем

$$\bar{T}_B = \frac{\bar{T}_{B0} - \frac{\hat{V}}{2k_V} [\xi_{кол} (2 - \hat{V}) + k_V^2 \hat{V}]}{1 - \hat{V}}. \quad (2.3.7)$$

Здесь  $\bar{T}_{B0}$  — относительная тяга винта при  $V = 0$ .

Определим теперь относительную скорость невозмущенного потока, взятую в долях от скорости истекающей струи  $\hat{V} = V / V_2$ . Скорость  $V_2$  найдем из (2.3.1):

$$V_2 = \frac{1}{2} \left( V + \sqrt{V^2 + \frac{4Tk_V}{\rho F}} \right), \quad \bar{V}_2 = \frac{1}{2} \left( \bar{V} + \sqrt{\bar{V}^2 + 4k_V^2} \right). \quad (2.3.8)$$

И тогда

$$\hat{V} = V / V_2 = \frac{2}{1 + \sqrt{1 + \frac{4Tk_V}{\rho F V^2}}} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 + 4k_V^2 / \bar{V}^2}}. \quad (2.3.9)$$

Формулы (2.3.8) и (2.3.9) получены при обдувке сверху. При обдувке снизу в этих формулах скорость  $V$  и единицу перед корнем следует взять со знаком минус. Решая совместно (2.3.7) и (2.3.9), получаем зависимости  $\bar{T}_B = f(\bar{V})$  и  $\bar{T}_B = T_B / T_{B0} = f(\bar{V})$ . В частности, для иде-

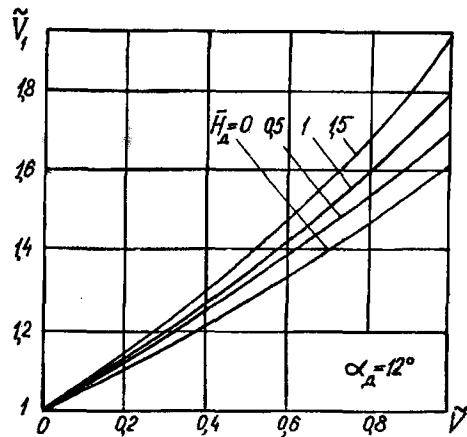


Рис. 2.3.2

ального коллектора ( $\bar{r}_k > 0,2$ ,  $\xi_{\text{кол}} \approx 0$ ) и цилиндрического диффузора ( $k_V = 1$ ,  $\xi_d = 0$ ) получим  $\bar{T}_{B0} = 0,5$  и

$$\bar{T}_B = 0,5(1 + \hat{V}); \quad \bar{T}_b = (1 + \hat{V}); \quad \bar{T}_k = 0,5(1 - \hat{V}); \quad \bar{T}_K = (1 - \hat{V}), \quad (2.3.10)$$

где  $\hat{V}$  определяется формулой (2.3.9) при  $k_V = 1$ .

На рис. 2.3.3 представлены зависимости  $\bar{T}_B$ ,  $\bar{T}_k$ ,  $\bar{T}_K$  в функции от  $\hat{V}$ . Как видим, тяга внутренней части кольца с ростом скорости быстро убывает. Если добавить сопротивление внешней части, то кольцо с некоторой скорости начинает давать сопротивление.

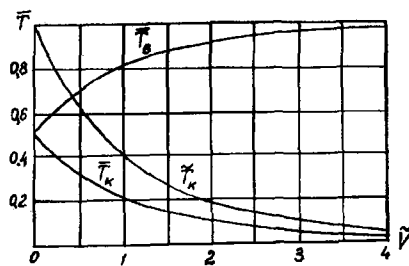


Рис. 2.3.3

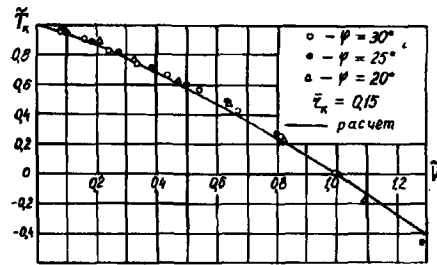


Рис. 2.3.4

Сравним расчет с экспериментальными данными, приведенными в [14]. Эксперимент проведен с кольцом, имеющим профиль коллектора в виде полуокружности с  $\bar{r}_k = 0,15$  и цилиндрический диффузор. Радиус втулки винта  $\bar{r}_o = 0,25$ , лопасти прямоугольной формы. Результаты эксперимента пересчитаны на относительную тягу кольца  $\bar{T}_k = C_{T_k} / C_{T_{k0}}$  по скорости  $\hat{V} = V / \sqrt{\frac{T_{\text{экс}}}{\rho k \pi R^2}}$ . Если учесть, что  $T_{\text{экс}} = T - Q_k$ , где  $Q_k$  — сопротивление внешнего участка коллектора, для которого принят  $C_x = 0,45$ , то расчет по приведенным выше формулам дает результат, очень близкий к экспериментальному. На рис. 2.3.4 сопоставлены результаты расчета и эксперимента. Хорошая сходимость подтверждает достоверность полученных формул.

Определив тягу винта  $T_B$  и скорость протекания  $V_1$ , найдем идеальную мощность. Зная относительный КПД второго рода  $\eta_0 = L_H / L$ , запишем выражение для мощности реального винта

$$L_H = T_B V_1; \quad L = L_H / \eta_0. \quad (2.3.11)$$

## 2.4. Потери энергии на закручивание струи за винтом

Теория идеального винта позволяет для заданного закона распределенной нагрузки по диску винта  $p_r = \frac{dT_B}{dF} = \frac{dT_B}{2\pi r dr}$  найти скорости закручивания потока за винтом, т.е. окружную компоненту индуктивной скорости, вызываемую вихревой системой винта. Для этого уравнение энергии (1.4.2) следует записать для кольцевой струйки шириной  $dr$ , вырезанной на радиусе  $r$ . Рассмотрим сечения струйки 1.1-1.1 и 1.2-1.2 в непосредственной близости перед винтом и за винтом (см. рис. 2.2.1). При переходе через диск винта скачком меняется давление на  $p_r$ . Вследствие того что на текущем радиусе на диске винта действует момент от касательных сил  $dQ_B$ , скачком меняется и окружная скорость от нулевого значения перед винтом до значения  $u_{1,2}$  за винтом. В соответствии с уравнением (1.4.2)

$$dL = dQ_V \left( p_r + \frac{\rho u_{1,2}^2}{2} \right) = dm \frac{p_r}{\rho} + dm \frac{u_{1,2}^2}{2}, \quad (2.4.1)$$

где  $dQ_V$  и  $dm$  — объемный и массовый секундные расходы:

$$dm = \rho V_1 2\pi r dr. \quad (2.4.2)$$

Момент  $dM$ , приложенный на радиусе  $r$ , определится из уравнения (1.2.1), а подводимая мощность  $dL = dM \omega$ . Тогда

$$dM = dm u_{1,2} r; \quad dL = dm u_{1,2} r \omega. \quad (2.4.3)$$

Приравняв выражения (2.4.1) и (2.4.3) для  $dL$ , получим уравнение

$$u_{1,2}^2 - 2r\omega u_{1,2} + \frac{2p_r}{\rho} = 0. \quad (2.4.4)$$

Из двух корней этого уравнения выберем тот, который удовлетворяет условию  $u_{1,2} < r\omega$ :

$$u_{1,2} = r\omega - \sqrt{(r\omega)^2 - \frac{2p_r}{\rho}} \quad (2.4.5)$$

или в относительных величинах

$$\bar{u}_{1,2} = u_{1,2} / \omega R = \bar{r} - \sqrt{\bar{r}^2 - \frac{2p_r}{\rho (\omega R)^2}}. \quad (2.4.6)$$



Формула (2.4.6) справедлива как для свободного винта, так и для винта в канале при любой скорости осевой обдувки и позволяет при известном законе  $p$ , найти распределение окружной индуктивной скорости по радиусу винта. Если кольцо имеет минимальные местные потери, малый зазор  $\delta$  и дает выровненный поток в плоскости диска винта, то наиболее близким к оптимальному винту является винт  $p_r = p = \text{const}$  (см. [17, разд. 6]). Однако, как следует из (2.4.6), для такого винта должно выполняться условие

$$\bar{r}^2 \geq \frac{2p}{\rho(\omega R)^2} = \frac{2T_B}{(1 - \bar{r}_0^2)\rho(\omega R)^2 \pi R^2} = \frac{C_T}{1 - \bar{r}_0^2}.$$

Отсюда может быть получен размер центральной части винта, которая должна быть закрыта обтекателем:

$$\bar{r}_0 \geq \sqrt{0,5(1 - \sqrt{1 - 4C_T})}. \quad (2.4.7)$$

Если коэффициент тяги винта отнести к действительной площади активного диска, то

$$C_T^* = C_T / (1 - \bar{r}_0^2); \quad \bar{u}_{1,2} = \bar{r} - \sqrt{\bar{r}^2 - C_T^*}; \quad \bar{r}_{0 \min} = \sqrt{C_T^*}. \quad (2.4.8)$$

Вычислим теперь затраты энергии на закручивание потока за винтом для винта с  $p = \text{const}$ . Проинтегрируем уравнение (2.4.1), учитывая, что для принятого винта осевой компонент скорости  $V_1$  приблизительно постоянен по диску:

$$L = Q_V p + \Delta L_u = T_B V_1 + \Delta L_u = T_B V_1 (1 + \Delta \bar{L}_u) = T_B V_1 \xi_u;$$

$$\begin{aligned} \Delta L_u &= \frac{1}{2} \int_{\bar{r}_0}^R dm u_{1,2}^2 = \rho \pi R^2 V_1 (\omega R)^2 \int_{\bar{r}_0}^1 \bar{r} \bar{u}_{1,2}^2 d\bar{r} = \\ &= T_B V_1 \frac{2}{C_T^* (1 - \bar{r}_0^2)} \int_{\bar{r}_0}^1 \bar{r} \bar{u}_{1,2}^2 d\bar{r}. \end{aligned}$$

Отсюда найдем относительные затраты мощности на закрутку струи при минимальном размере втулки:

$$\begin{aligned} \Delta \bar{L}_u &= \frac{\Delta L_u}{T_B V_1} = \frac{2}{C_T^* (1 - C_T^*)} \int_{\sqrt{C_T^*}}^1 \bar{r} (\bar{r} - \sqrt{\bar{r}^2 - C_T^*})^2 d\bar{r} = \\ &= \frac{1 - \sqrt{1 - C_T^*}}{C_T^*} - \frac{1}{2\sqrt{1 - C_T^*}} + \frac{C_T^*}{2(1 - C_T^*)} \ln \frac{1 + \sqrt{1 - C_T^*}}{\sqrt{C_T^*}}. \quad (2.4.9) \end{aligned}$$

Результаты расчетов по формулам (2.4.8), (2.4.9) представлены в табл. 2.4.1

Таблица 2.4.1

$C_T^*$	0,02	0,04	0,06	0,08	0,1	0,12	0,14	0,16
$C_T$	0,0196	0,0384	0,0564	0,0736	0,0900	0,1056	0,1204	0,1344
$\bar{r}_0$	0,141	0,200	0,245	0,283	0,316	0,346	0,374	0,400
$\Delta \bar{L}_u$	0,0244	0,0425	0,0585	0,0733	0,0871	0,1003	0,1131	0,1255

Из табл. 2.4.1 видно, что для высоконапорных вентиляторов ( $C_T \geq 0,09$ ) размер центральной части достаточно велик ( $\bar{r}_0 = 0,3 \dots 0,4$ ), а окружные потери мощности достигают 8...12% от идеальной мощности  $T_B V_1$ . Для малонапорных вентиляторов ( $C_T = 0,01 \dots 0,02$ ) эти потери составляют 1...2%.

### 3. ТЕОРИЯ ВИНТА, РАБОТАЮЩЕГО В КАНАЛЕ

В предыдущем разделе винт представлялся в виде условного активного диска, и, следовательно, его конструкция во внимание не принималась. В этом разделе рассмотрим работу реального винта, установленного в канале внутри кольца. Его вихревая система будет такой же, как и для изолированного винта [17, 19] с той только разницей, что к невозмущенному потоку, набегающему на винт со скоростью  $V$ , добавляется дополнительный поток, наведенный кольцом. Если кольцо моделировать распределенной по его поверхности системой особенностей (вихри, диполи), то в плоскости диска винта в общем случае получим неравномерный дополнительный поток, зависящий от формы кольца (его длины и толщины). Однако если длина кольца превышает или равна диаметру винта и радиус кривизны входной

кромки коллектора  $\bar{r}_k > 0,1$ , то кольцо близко к идеальному и дает выровненный дополнительный поток. Изложенная в разделе 2 теория позволяет определить только осредненный по диску дополнительный поток и, следовательно, должна давать достаточно надежный результат для колец с выровненным потоком. Вихревая система самого винта вызывает индуктивный поток, который находится в зависимости от формы лопастей.

### 3.1. Интегральные формулы тяги и мощности винта

В теории винта тяга и крутящий момент определяются интегрированием по длине лопасти элементарных величин  $dT_b$  и  $dM$ . Для их определения применим метод изолированного элемента лопасти. В соответствии с гипотезой плоских сечений рассмотрим работу элемента лопасти длиной  $dr$ , взятого на текущем радиусе  $r$ , как работу элемента крыла в плоскопараллельном потоке. На рис. 3.1.1 показаны многоугольники сил и скоростей (в относительном движении) в сечении лопасти на радиусе  $r$ . Здесь  $V_1$  — осевая скорость потока в канале в плоскости вращения винта;  $u_1$  — окружная индуктивная

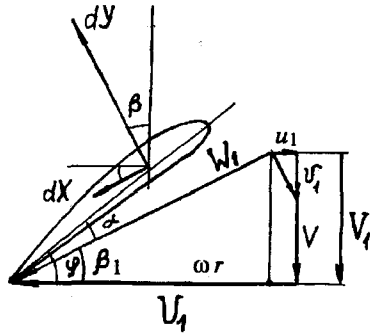


Рис. 3.1.1

ная скорость;  $\omega r$  — скорость вращения элемента;  $U_1 = \omega r - u_1$ ,  $W_1$  — скорость притекания;  $\beta_1$  — угол притекания потока к элементу.

Подъемную силу элемента определим по теореме Жуковского и по формуле теории подобия

$$dY = \rho \Gamma_r W_1 dr = C_y \frac{\rho W_1^2}{2} b dr,$$

где  $\Gamma_r$  — циркуляция скорости в сечении лопасти.

Отсюда получим уравнение связи для циркуляции  $\Gamma_r$  и ее относительной величины  $\bar{\Gamma}_r$ :

$$\Gamma_r = \frac{1}{2} b C_y W_1;$$

$$\bar{\Gamma}_r = \Gamma_r / \frac{4\pi}{k_\lambda} \omega R^2 = \frac{1}{8} \frac{k_\lambda b}{\pi} C_y \bar{W}_1 = \frac{1}{8} \sigma C_y \bar{W}_1. \quad (3.1.1)$$

Силу профильного сопротивления лопасти определим через обратное качество профиля  $\mu = C_{xp} / C_y$ :

$$dX = \mu dY = \mu \rho \Gamma_r W_1 dr. \quad (3.1.2)$$

Спроецируем силы  $dY$  и  $dX$  на ось винта и плоскость вращения. Тогда для  $k_\lambda$  элементов на окружности радиуса  $r$  будем иметь

$$dT_b = \rho k_\lambda \Gamma_r (U_1 - \mu V_1) dr; \quad (3.1.3)$$

$$dQ_b = \rho k_\lambda \Gamma_r (V_1 + \mu U_1) dr; \quad dM = dQ_b r.$$

В аэродинамических расчетах винта тягу  $T_b$ , крутящий момент  $M$  и мощность  $L$  обычно определяют по формулам экспериментальной аэродинамики:

$$T_b = C_T \frac{\rho (\omega R)^2}{2} \pi R^2; \quad (3.1.4)$$

$$M = m_k \frac{\rho (\omega R)^2}{2} \pi R^3; \quad L = m_k \frac{\rho (\omega R)^3}{2} \pi R^2.$$

Аэродинамические коэффициенты тяги  $C_T$  и мощности  $m_k$  называют аэродинамическими характеристиками винта. Из (3.1.3) и (3.1.4) получим

$$dC_T = 8 \bar{\Gamma}_r (\bar{U}_1 - \mu \bar{V}_1) d\bar{r}; \quad dm_k = 8 \bar{\Gamma}_r (\bar{V}_1 + \mu \bar{U}_1) \bar{r} d\bar{r}. \quad (3.1.5)$$

Интегральные формулы аэродинамических характеристик будут

$$C_T = \int_{\bar{r}_0}^B dC_T; \quad m_k = \int_{\bar{r}_0}^1 dm_k, \quad (3.1.6)$$

где  $B$  — относительный радиус концевой сечения лопасти (см. формулу (5.3.18)). Этот радиус определяет концевые потери лопастей винта в зависимости от зазора  $\delta$  и числа лопастей  $k_\lambda$ .

Задача по расчету аэродинамических характеристик  $C_T, m_k$  будет решена, если определены скорости  $\bar{U}_1$  и  $\bar{V}_1$ . Окружная индуктивная

скорость  $u_1 = \frac{1}{2} u_{1,2}$  найдется из уравнения (2.4.4), в котором следует положить  $p = \frac{dT_b}{2\pi r dr} = \frac{\rho k_l \Gamma_r U_1}{2\pi r}$ ;  $u_{1,2} = 2u_1$ ;  $\omega r = U_1 + u_1$ . Решив уравнение, получим

$$u_1 = \frac{k_l \Gamma_r}{4\pi r}; \quad \bar{u}_1 = \frac{\bar{\Gamma}_r}{\bar{r}}; \quad \bar{U}_1 = \bar{r} - \frac{\bar{\Gamma}_r}{\bar{r}}. \quad (3.1.7)$$

Осевая скорость  $V_1$  определится как сумма индуктивной скорости винта  $v_{1в}$  и набегающего на винт потока  $V_k = V + \Delta v_k$ , где  $V$  — невозмущенный поток, а  $\Delta v_k$  — дополнительный поток, вызванный присутствием кольца. В этом случае индуктивная скорость винта  $v_{1в}$  найдется как для изолированного винта при скорости набегающего потока  $V_k$  (см. [17, формулы (7.8) — (7.10)]). Дополнительную скорость  $\Delta v_k$  легко найти, если от скорости протекания  $V_1$  (см. формулу (2.3.3)) отнять скорость протекания для изолированного винта с той же удельной нагрузкой:

$$\Delta v_k = V_1 - V_{1из}; \quad V_{1из} = \frac{1}{2} \left( V + \sqrt{V^2 + \frac{2p}{\rho}} \right). \quad (3.1.8)$$

При таком подходе можно вести аэродинамический расчет и проектирование оптимального винта в канале по методу, изложенному в [17] для изолированного винта.

Следует иметь в виду, что у винта в кольце (фенестрон, подъемная система) может быть большое число лопастей. В этом случае нужно вводить поправку в аэродинамические характеристики одиночного профиля, поскольку цилиндрическое сечение винта на радиусе  $r$  представляет собой решетку профилей с шагом  $l = \frac{2\pi r}{k_l}$ . Чем больше густота решетки  $\frac{b}{l}$ , тем значительнее эта поправка. Особенно это относится к комлевым сечениям лопастей (теория решеток изложена в разделе 5).

Принятая гипотеза плоских сечений относится к лопастям большого удлинения ( $\lambda \geq 5$ ). Для широких лопастей следует вводить поправку на искривление потока, обтекающего профиль. Здесь может быть применен метод искусственного искривления сечения лопасти (см. [19, с. 175]).

В практических расчетах аэродинамические характеристики винта приближенно можно вычислять по средней скорости протекания  $V_1$  (формула (2.3.3)) и характерному сечению лопасти, расположенному на относительном радиусе  $\bar{r}_x = 0,7$ . При больших размерах втулки следует принять  $\bar{r}_x = \bar{r}_0 + 0,7(1 - \bar{r}_0) = 0,7 + 0,3\bar{r}_0$ .

Для подъемных систем «винт в кольце» и фенестронов наибольший интерес представляет режим работы на месте ( $V = 0$ ).

### 3.2. Аэродинамические характеристики системы «винт в кольце» в режиме работы на месте

Для режима работы на месте средняя скорость протекания воздуха в канале определяется формулами (2.2.8), (2.2.9), (2.2.10), откуда следует

$$v_1 = a v_{1из}, \quad a = \sqrt{\frac{2}{T_b k_v}}. \quad (3.2.1)$$

Угол притекания  $\beta_1$  на элементе лопасти на этом режиме мал и, следовательно,  $\cos \beta_1 \approx 1$ . Тогда, пренебрегая скоростями закручивания струи при определении  $\Gamma_r$ , из (3.1.1) получаем приближенное уравнение связи

$$\Gamma_r \approx \frac{1}{2} b C_y \omega r, \quad \bar{\Gamma}_r = \frac{1}{8} \sigma C_y \bar{r}. \quad (3.2.2)$$

Здесь  $\sigma = k_l \bar{b} / \pi$  — коэффициент заполнения винта на текущем радиусе  $\bar{r}$ . Относительная окружная индуктивная скорость

$$\bar{u}_1 = \bar{\Gamma}_r / \bar{r} \approx \frac{1}{8} \sigma C_y. \quad (3.2.3)$$

В формуле (3.1.5) для  $dC_T$  можно пренебречь слагаемым  $\mu \bar{V}_1$  как произведением двух малых величин, а в формуле для  $dm_k$  принять  $\bar{U}_1 \approx \bar{r}$ . Тогда получим

$$dC_T \approx 8 \bar{\Gamma}_r (\bar{r} - \bar{u}_1) d\bar{r}; \quad dm_k \approx 8 \bar{\Gamma}_r (\bar{v}_1 + \mu \bar{r}) \bar{r} d\bar{r}. \quad (3.2.4)$$

Подставив сюда формулы (3.2.2) и (3.2.3), будем иметь

$$dC_T = \sigma C_y \bar{r}^2 d\bar{r} - \frac{1}{8} \sigma^2 C_y^2 \bar{r} d\bar{r}; \quad (3.2.5)$$

$$dm_k = \sigma C_y \bar{r}^2 \bar{v}_1 d\bar{r} + \sigma C_{xp} \bar{r}^3 d\bar{r}. \quad (3.2.6)$$

Запишем интегральное выражение для аэродинамического коэффициента тяги:

$$C_T = \int_{\bar{r}_0}^B \sigma C_y \bar{r}^2 d\bar{r} - \frac{1}{8} \int_{\bar{r}_0}^B \sigma^2 C_y^2 \bar{r} d\bar{r} = \kappa_u C_T^*, \quad (3.2.7)$$

где  $C_T^*$  — коэффициент тяги, вычисленный без учета закручивания струи. Для  $\kappa_u$  в [14] дана приближенная формула

$$\kappa_u \approx 1 - 0,6 C_T^*. \quad (3.2.8)$$

Для  $C_T^*$  получим известную формулу [15]

$$C_T^* = \int_{\bar{r}_0}^B \sigma C_y \bar{r}^2 d\bar{r} = \frac{\kappa}{3} \sigma_7 C_{y7} k_T, \quad \kappa = B^3 - \bar{r}_0^3, \quad (3.2.9)$$

где  $k_T$  — коэффициент, учитывающий форму лопасти в плане;  $\kappa$  — коэффициент концевых и втулочных потерь.

Составим из (3.2.6) интегральное выражение для коэффициента мощности:

$$m_k = \int_{\bar{r}_0}^1 \sigma C_y \bar{r}^2 \bar{v}_1 d\bar{r} + \int_{\bar{r}_0}^1 \sigma C_{xp} \bar{r}^3 d\bar{r} = m_i + m_p. \quad (3.2.10)$$

Первый интеграл учитывает индуктивные потери винта (осевые и окружные), второй — профильные потери на трение лопастей о воздух. Вычислим интеграл индуктивных потерь. Учитывая (3.2.5), находим

$$m_i = \int_0^1 \bar{v}_1 dC_T + \frac{1}{8} \int_{\bar{r}_0}^1 \bar{v}_1 \sigma^2 C_y^2 \bar{r} d\bar{r} = m_{iv} + m_{iu} = \xi_u m_{iv}, \quad (3.2.11)$$

где  $m_{iv}$  и  $m_{iu}$  — аэродинамические коэффициенты соответственно осевых и окружных индуктивных потерь. Для коэффициента  $\xi_u$  в [14] получена приближенная формула

$$\xi_u = 1 + 0,6 C_T. \quad (3.2.12)$$

При больших значениях коэффициента тяги ( $C_T = 0,05 \dots 0,1$ ) поправка на закручивание струи для коэффициентов  $C_T$  и  $m_k$  может составить 3...6% и поэтому должна учитываться.

Вычислим теперь коэффициент осевых индуктивных потерь  $m_{iv}$ . Входящая под знак интеграла осевая индуктивная скорость  $\bar{v}_1$  найдется по формуле (3.2.1), в которой  $\bar{v}_1$  из определим без учета скоростей закручивания потока. Тогда, определяя  $\bar{\Gamma}_r$  по формуле (3.2.2), получаем

$$\bar{v}_1(\bar{r}_1) = a \sqrt{\bar{\Gamma}_r} = \sqrt{\frac{2}{T_B k_V}} \sqrt{\frac{1}{8} \sigma C_y \bar{r}}. \quad (3.2.13)$$

Будем искать выражение для  $m_{iv}$  в виде

$$m_{iv} = J_v \bar{v}_1 \text{cp} C_T, \quad (3.2.14)$$

где  $J_v$  — коэффициент индукции, учитывающий влияние неравномерности распределения осевых индуктивных скоростей по диску винта.

В принятой постановке профиль скоростей по радиусу винта в канале будет таким же, как и для изолированного винта, следовательно, таким же будет и коэффициент индукции.

Входящая в (3.2.14) средняя индуктивная скорость найдется по формуле

$$\bar{v}_1 = \sqrt{\frac{2}{T_B k_V}} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\frac{C_T}{\kappa}}. \quad (3.2.15)$$

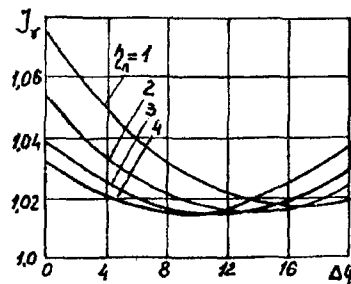


Рис. 3.2.1

Окончательно аэродинамические коэффициенты тяги и мощности винта в кольце, работающего на месте, будут определяться следующими формулами:

$$C_T = \frac{\kappa \kappa_u}{3} \sigma_7 C_{y7} k_T; \quad (3.2.16)$$

$$\kappa = B^3 - \bar{r}_0^3;$$

$$m_k = J_v \xi_u C_T \bar{v}_1 + m_p = \frac{J_v \xi_u}{2 \sqrt{\kappa}} \sqrt{\frac{2}{T_B k_V}} C_T^{3/2} + \frac{k_p C_{xp7} \sigma_7}{4}. \quad (3.2.17)$$

Коэффициенты  $J_v, k_T, k_p$  определены так же, как и для изолированного винта. Для трапецевидных лопастей с сужением  $\eta_L$  и отрицательной круткой  $\Delta \phi$  имеем (см. [15])

$$k_T = 1 - \frac{0,05(\eta_L - 1)}{0,7 + 0,3\eta_L}; \quad k_p = 1 - \frac{0,1(\eta_L - 1)}{0,7 + 0,3\eta_L}. \quad (3.2.18)$$

Коэффициент индукции  $J_v$  представлен на графике рис. 3.2.1.

### 3.3. Относительный КПД системы «винт в кольце» в режиме работы на месте

Относительный КПД системы определяется выражением (2.2.14), которое перепишем в безразмерных коэффициентах:

$$\eta_0 = \sqrt{\frac{2}{T_b} \frac{C_T^{3/2}}{k_V}} \cdot \frac{C_T^{3/2}}{2m_x}. \quad (3.3.1)$$

Формулы для аэродинамических характеристик  $C_T$  и  $m_x$  (3.2.16), (3.2.17) позволяют найти зависимость относительного КПД от конструктивных параметров винта и кольца:

$$\eta_0 = \frac{\sqrt{\kappa}}{J_v \xi_u + 1,837 \sqrt{T_b} k_V \frac{k_p}{k_T^{3/2}} \frac{C_{xp7}}{C_{y7}^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{\sigma_7}}}. \quad (3.3.2)$$

Зависимость  $\bar{T}_b$  ( $\bar{r}_k, \alpha_d, \bar{H}_d, \bar{\delta}$ ) находится по формулам (2.2.6), (2.2.17).

Анализ формулы (3.3.2) показывает, что применение сужающихся идеально закрученных ( $C_y = \text{const}$  по  $\bar{r}$ ) лопастей положительно сказывается на величине  $\eta_0$ . Влияние коэффициента заполнения  $\sigma_7$ , числа лопастей и зазора  $\bar{\delta}$  проявляется в коэффициенте концевых и втулочных потерь  $\kappa = B^3 - \bar{r}_0^3$ . Влияние параметров кольца  $\bar{r}_k, \alpha_d, \bar{H}_d, \bar{\delta}$  сказывается на  $\bar{T}_b$ . При  $\bar{r}_k \geq 0,15$ ;  $\bar{H}_d > 1$ ;  $\alpha_d = 12^\circ$  это влияние практически незаметно, так как КПД остается постоянным, достигнув максимальной величины. Наиболее сильное влияние на  $\eta_0$  оказывает экономическое качество профиля  $C_{y7}^{3/2}/C_{xp7}$ , максимум которого соответствует значениям  $C_{y7} \approx 0,7 \dots 0,8$ . Поэтому при проектировании подъемных систем «винт в кольце» и фенестронов следует по возможности

выбирать большие значения  $C_{y7}$ , что соответствует  $C_T/\sigma_7 = 0,22 \dots 0,25$ . Выбор очень высоких значений  $C_T/\sigma_7$  нерационален, поскольку при этом снижается критическое число Маха, вследствие чего приходится уменьшать скорости концов лопастей  $\omega R$  и увеличивать коэффициент заполнения.

При выборе окружных скоростей  $\omega R$ , соответствующих числам  $M$ , приближающимся к критическим, расчет аэродинамических характеристик винта следует вести численным интегрированием, используя набор поляр профилей по числам  $M$ . Приблизительно в методе расчета по характерному сечению лопасти влияние сжимаемости воздуха на профильное сопротивление винта можно учесть, определив расчетное число  $M$  по сечению лопасти, взятому на относительном радиусе  $\bar{r} = \bar{r}_x + 0,7(1 - \bar{r}_x)$ , где  $\bar{r}_x = \bar{r}_0 + 0,7(1 - \bar{r}_0)$ .

Положив в формуле (3.3.2)  $\bar{T}_b = 1, k_V = 2$ , получим формулу относительного КПД для изолированного винта. У винта, работающего в кольце,  $\bar{T}_b \approx 0,5, k_V \leq 1$ , и, следовательно, его профильные потери по отношению к индуктивным более чем в два раза меньше по сравнению с винтом изолированным. Кроме того, у винта в кольце существенно меньше концевые потери, а выбор  $C_{y7}$  для подъемных систем и фенестрона практически не ограничен условиями срыва в горизонтальном полете, как это имеет место для несущего винта вертолета. Все это позволяет получить высокие значения КПД, которые могут достигать 90%. На рис.3.3.1 - 3.3.4 представлены зависимости  $\eta_0$  от различных параметров винта и кольца, подсчитанные по формуле (3.3.2). Расчеты велись для следующих исходных данных: лопасти винта идеально закрученные ( $C_y = \text{const}$  по  $\bar{r}$ ), трапецевидные с коэффициентом сужения  $\eta_L = 2, k_T = 0,962, k_p = 0,923, J_v = 1,023, \bar{r}_0 = 0,2$ , профиль лопастей NACA230-12. Поляра профиля взята при  $M = 0,4$ .

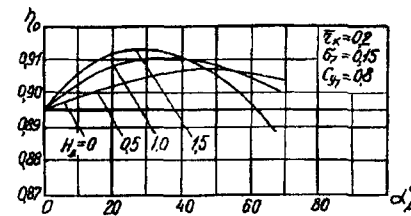


Рис. 3.3.1

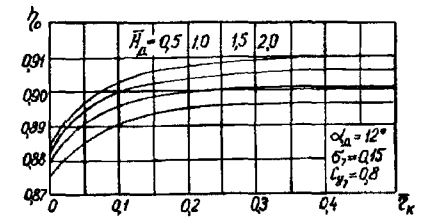


Рис. 3.3.2

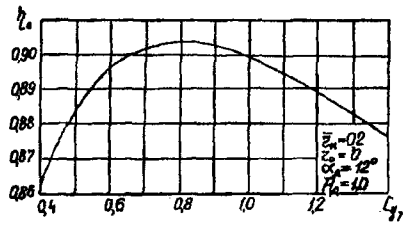


Рис. 3.3.3

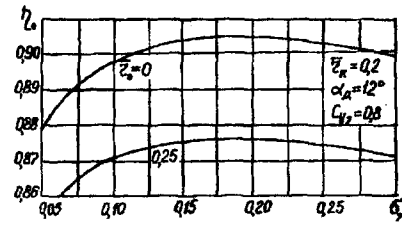


Рис. 3.3.4

Слабая функциональная связь  $\eta_0$  с параметрами кольца  $\bar{r}_x \geq 0,1$ ,  $\bar{H}_d$ ,  $\alpha_d$  позволяет выбирать оптимальные параметры коллектора и диффузора вне зависимости от винта из условия максимального качества фенестрона. В свою очередь оптимальные параметры винта могут выбираться независимо от кольца из условия максимального КПД.

### 3.4. Расчет аэродинамических характеристик системы «винт в кольце» в режиме осевой обдувки

Аэродинамические характеристики системы «винт в кольце» в режиме осевой обдувки приближенно можно рассчитывать по характерному сечению лопасти, которое для несущих систем принято брать на радиусе  $\bar{r} = 0,7$ , для движителей на радиусе  $\bar{r} = 0,75$ , а при больших размерах втулки на несущих системах и фенестронах в соответствии с рекомендациями раздела 3.1  $\bar{r}_x = 0,7 + 0,3\bar{r}_0$ .

Выпишем основные расчетные формулы для этого режима в относительных величинах, которые получены из формул предыдущих разделов.

Средняя скорость протекания воздуха (из (2.3.2))

$$\bar{V}_1 = \frac{1}{2k_V} \left( \bar{V} + \sqrt{\bar{V}^2 + \frac{2k_V C_T}{(1 - \bar{r}_0^2) \bar{T}_B}} \right). \quad (3.4.1)$$

Окружная компонента скорости притекания на характерном радиусе (из (2.4.8))

$$\bar{U}_1 = \bar{r}_x - \bar{u}_1 = \bar{r}_x - \frac{1}{2} \bar{u}_{1,2} = \frac{1}{2} \left( \bar{r}_x + \sqrt{\bar{r}_x^2 - \frac{C_T}{1 - \bar{r}_0^2}} \right). \quad (3.4.2)$$

Аэродинамические характеристики винта:

$$\left. \begin{aligned} C_T &= \frac{\kappa \kappa_u}{3} \sigma_7 C_{y7} k_T C_V; \quad \kappa = B^3 - \bar{r}_0^3; \quad \kappa_u \approx 1 - 0,6 C_T; \\ m_x &= J_V C_T \bar{V}_1 + m_p; \quad m_p = \frac{k_p C_{xp7} \sigma_7}{4} C_V; \end{aligned} \right\} \quad (3.4.3)$$

$$\left. \begin{aligned} C_V &= \sqrt{1 + \bar{V}_1^2 / \bar{U}_1^2}; \quad J_V = 1 + \frac{J_V \xi_u}{\sqrt{\kappa}} (1 - \bar{V} / \bar{V}_1); \\ \xi_u &\approx 1 + 0,6 C_T. \end{aligned} \right\} \quad (3.4.4)$$

Коэффициенты  $k_T, k_p, J_V$  в зависимости от сужения и крутки лопасти определяются по формулам (3.2.18) и рис. 3.2.1. Относительный радиус концевой сечения лопасти  $B$ , учитывающий концевые потери винта, находится по формуле (5.3.18).

Входящая в формулу (3.4.1) для  $\bar{V}_1$  относительная тяга  $\bar{T}_B$  винта вычисляется по формуле (2.3.7), в которой  $\hat{V} = \bar{V} / \bar{V}_2 = \bar{V} / k_V \bar{V}_1$ . Это значит, что при заданных  $C_T$  и  $\bar{V}$  в явном виде  $\bar{V}_1$  не определяется. Поэтому формулы для  $\bar{V}_1$  и  $\bar{T}_B$  рассматриваются как система двух уравнений, которую можно решать методом последовательных приближений. В качестве первого приближения в формулу для  $\bar{V}_1$  подставляется  $\bar{T}_B$  в режиме работы на месте ( $\bar{T}_{B0}$ ), определяемое формулой (2.2.6). После окончания процесса итераций найденное значение  $\bar{T}_B$  нужно пересчитать на влияние зазора  $\delta$  по формуле (2.2.17). Коэффициент относительной потери напора  $\epsilon$  находится по формуле (5.3.20).

Напомним, что в приведенных выше формулах суммарная тяга системы включает в себя тягу винта и тягу внутреннего по отношению к струе участка кольца (от критической точки на коллекторе до плоскости вращения винта). Поэтому необходимо учесть силу сопротивления внешнего по отношению к струе участка поверхности кольца. Для подъемных систем и фенестронов, у которых внешняя часть кольца смыкается с конструктивными формами ЛА, эту силу следует отнести к сопротивлению самого корпуса ЛА. Для самолетных движителей винт с кольцом можно рассматривать как автономную систему, и тогда суммарная тяга приближенно определяется за вычетом профильного сопротивления кольца от обдувки невозмущенным потоком:



$$\left. \begin{aligned} T_{\Sigma} &= T_{\text{в}} / \bar{T}_{\text{в}} - Q_{\text{рк}}; & Q_{\text{рк}} &= C_{\text{хрк}} \frac{\rho V^2}{2} S_{\text{к}}; \\ C_{T\Sigma} &= \frac{C_T}{\bar{T}_{\text{в}}} - C_{\text{хрк}} \bar{V}^2 \frac{S_{\text{к}}}{\pi R^2}. \end{aligned} \right\} \quad (3.4.5)$$

Приведем алгоритм расчета аэродинамических характеристик системы «винт в кольце», применимый к любому типу подъемного или тянущего устройства.

Исходными данными для расчета являются параметры кольца  $\bar{r}_{\text{к}}, \bar{H}_{\text{д}}, \alpha_{\text{д}}, \bar{\delta}$ ,  $n = \left(1 + \bar{H}_{\text{д}} \operatorname{tg} \frac{\alpha_{\text{д}}}{2}\right)^2$ ; параметры винта и лопастей  $k_{\text{л}}, \sigma_{\gamma}, \eta_{\text{л}}, \Delta \varphi$ ; профиль сечения лопасти и его характеристики  $a_{\infty}$ ,  $C_{\text{у}} (C_{\text{хр}})$ .

В соответствии с принятыми параметрами кольца и винта определяются коэффициенты  $k_T, k_p, J_v, k_V = \frac{1}{n}$ , относительная тяга винта  $\bar{T}_{\text{в}0}$  в режиме работы на месте и характерный радиус  $\bar{r}_{\text{х}}$ , которые являются исходными характеристиками в последующем расчете.

Для заданного режима работы винта  $V$  определяются аэродинамические характеристики системы  $C_{T\Sigma}, C_T, m_{\text{к}}$  и угол установки лопасти  $\varphi_{\gamma}$ . Расчет удобнее вести от заданного значения  $C_T$  с последующим определением  $\varphi_{\gamma}$ . Расчет ведется в следующем порядке:

- 1) из формул (2.3.7) и (3.4.1) методом последовательных приближений определяются  $\bar{T}_{\text{в}}$  и  $\bar{V}_1$  при нулевом зазоре ( $\delta = 0$ );
- 2) определяется  $\bar{U}_1$  по формуле (3.4.2);
- 3) вычисляются коэффициенты  $B, \kappa, \kappa_{\text{у}}, \xi_{\text{у}}, C_V, \varepsilon$ ;
- 4) определяется  $C_{\gamma\text{л}}$  в характерном сечении лопасти из формулы (3.4.3):

$$C_{\gamma\text{л}} = 3 C_T / \kappa \kappa_{\text{у}} \sigma_{\gamma} k_T C_V;$$

5) из полярны профиля по найденному  $C_{\gamma\text{л}}$  определяется  $C_{\text{хрл}}$  при  $M = \omega R (0,7 + 0,3 \bar{r}_{\text{х}}) / a$  ( $a$  — скорость звука);

6) по формулам (3.4.3) вычисляются  $m_p, m_{\text{к}}$ ;

7) вычисляется угол установки лопасти в характерном сечении

$$\varphi_{\gamma}^{\circ} = 57,3 \frac{C_{\gamma\text{л}}}{a_{\infty}} + \operatorname{arctg} \frac{\bar{V}_1}{U_1};$$

8) делается поправка относительной тяги винта  $\bar{T}_{\text{в}, \delta=0}$ , найденной в п. 1, на зазор  $\delta$ :

$$\bar{T}_{\text{в}} = \varepsilon \bar{T}_{\text{в}, \delta=0} + (1 - \varepsilon);$$

9) определяется суммарная тяга системы: для подъемной системы и фенестрона

$$C_{T\Sigma} = \frac{C_T}{\bar{T}_{\text{в}}},$$

для движителя

$$C_{T\Sigma} = \frac{C_T}{\bar{T}_{\text{в}}} - C_{\text{хрк}} \bar{S}_{\text{к}} \bar{V}^2,$$

$$\bar{S}_{\text{к}} = \frac{2\pi (R + 0,5 \bar{c} b_{\text{к}}) b_{\text{к}}}{\pi R^2} = (2 + \bar{c} \bar{b}_{\text{к}}) \bar{b}_{\text{к}}. \quad (3.4.6)$$

Если не задана геометрия лопастей, то приближенно можно принять  $C_{\text{хрл}} = 0,01$ ;  $C_{\text{хрк}} = 0,008 \dots 0,01$ ;  $k_p = k_T = 1$ ;  $J_v = 1,03$ .

Результаты расчетов представляются в виде поляр  $C_{T\Sigma}(m_{\text{к}})$ ,  $C_T(m_{\text{к}})$  при заданных  $\bar{V}$ . На полярны целесообразно нанести разбивку углов установки лопастей.

Более точный (поверочный) расчет системы «винт в кольце» можно вести в соответствии с указаниями раздела 3.1.

### 3.5. Аэродинамические характеристики движителя «винт в кольце»

Обычно кольцо самолетной установки имеет в сечении крыльевой профиль, который располагается спинкой внутрь. Винт устанавливается в самой узкой части канала (в месте максимальной толщины профиля). Исходя из формулы (2.2.16), длину и толщину кольца (хорду профиля  $b$  и относительную толщину  $\bar{c} = c/b$ ) выбирают таким образом, чтобы в режиме работы на месте система давала тягу не меньшую, чем тяга изолированного винта ( $K > 1$ ) (см. рис. 2.2.5). Для этого следует обеспечить средний радиус кривизны на передней кромке кольца  $\bar{r}_{\text{к}} > 0,1$  и достаточную длину диффузора, чтобы угол раствора  $\alpha_{\text{д}}$  не превышал  $12^{\circ}$ . Целесообразнее профиль брать несимметричным, так как в этом случае получается более плавный вход в канал и, следовательно, меньшие потери.

Например, этим условиям удовлетворяет кольцо длиной, равной диаметру винта, имеющее в сечении несимметричный профиль с относительной хордой  $\bar{b}_k = b_k/R = 2$ , и относительной толщиной  $\bar{c}_k = c_k/b_k = 0,1$  ( $\bar{r}_{ксп} = 0,5\bar{c}_k\bar{b}_k$ ). Если максимальная толщина профиля будет на расстоянии  $0,3b_k$  от передней кромки, то  $\bar{H}_d = 1,4$  и при  $\alpha_d = 12^\circ$  стрелка прогиба средней линии профиля составит  $\sim 0,25 c_k$ .

Вычисленные аэродинамические характеристики  $C_{T\Sigma}(\bar{V})$ ,  $C_T(\bar{V})$  или  $C_{T_k}(\bar{V})$  (рис. 3.5.1),  $m_k(\bar{V})$  для ряда значений  $\varphi_7$  представляются в виде винтовых диаграмм.

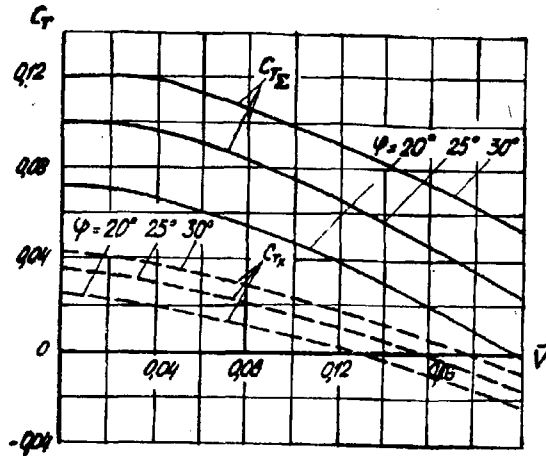


Рис. 3.5.1

Здесь мы придерживаемся системы винтовых коэффициентов, принятых для вертолетных винтов ( $C_T; m_k; \bar{V}$ ). В практике аэродинамического расчета самолетного винта обычно принимается система коэффициентов  $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \lambda$ :

$$T = \bar{\alpha} \rho D^4 n_s^2, \quad L = \bar{\beta} \rho D^5 n_s^3, \quad \lambda = V / D n_s,$$

где  $n_s$  — частота вращения винта,  $c^{-1}$ .

При необходимости нетрудно перейти к этим коэффициентам по формулам пересчета

$$\bar{\alpha} = \frac{\pi^3}{8} C_T; \quad \bar{\beta} = \frac{\pi^4}{8} m_k; \quad \lambda = \pi \bar{V}. \quad (3.5.1)$$

Важной характеристикой движителя является полетный КПД, который определяется как отношение полезной мощности  $T_\Sigma V$ , идущей на перемещение ЛА со скоростью  $V$ , к затраченной:

$$\eta = \frac{L_{\text{пол}}}{L} = \frac{T_\Sigma V}{L} = \frac{C_{T\Sigma} \bar{V}}{m_k}. \quad (3.5.2)$$

Эта характеристика представляется в винтовых диаграммах в виде зависимостей  $\eta(\bar{V})$  для ряда значений  $\varphi_7$ .

Проведем энергетический анализ, позволяющий сравнить КПД идеального винта в кольце и идеального изолированного винта. Для этого получим расчетную формулу для идеального КПД:

$$\eta_{\text{и}} = \frac{T_\Sigma V}{L_{\text{и}}} = \frac{(T - Q_{\text{рк}}) V}{T_{\text{в}} V_1} = \frac{(1 - Q_{\text{рк}}/T) V}{T_{\text{в}} V_1} = \frac{C_Q}{T_{\text{в}}} \frac{V}{V_1}. \quad (3.5.3)$$

Для  $V_1$  применим формулу (2.3.2), в которой примем  $T = T_\Sigma + Q_{\text{рк}}$  ( $Q_{\text{рк}}$  определяется по формуле (3.4.5)):

$$V_1 = V \frac{1}{2k_V} \left( 1 + \sqrt{1 + 2k_V(B_\Sigma + C_{\text{хрк}} \bar{S}_k)} \right); \quad (3.5.4)$$

$$B_\Sigma = \frac{2T_\Sigma}{\rho V^2 F}; \quad \bar{S}_k = \frac{S_k}{F},$$

где  $B_\Sigma$  — коэффициент нагрузки системы «винт в кольце».

Подставив (3.5.4) в (3.5.3), получим

$$\eta_{\text{и}} = \frac{2k_V C_Q}{T_{\text{в}} \left[ 1 + \sqrt{1 + 2k_V(B_\Sigma + C_{\text{хрк}} \bar{S}_k)} \right]}; \quad C_Q = \frac{B_\Sigma}{B_\Sigma + C_{\text{хрк}} \bar{S}_k}. \quad (3.5.5)$$

Входящая сюда относительная площадь кольца определится по формуле (3.4.6), а относительная тяга винта  $\bar{T}_v(\bar{V})$  — по формуле (2.3.7). Идеальный КПД изолированного винта находится по известной формуле [15]

$$\eta_{и.из} = \frac{T_{из} V}{L_{и.из}} = \frac{V}{V_{из}} = \frac{2}{(1 + \sqrt{1 + B_{из}})} \quad (3.5.6)$$

Формулы (3.5.5) и (3.5.6) позволяют сравнить идеальные КПД системы «винт в кольце» и изолированного винта при одинаковой полезной мощности, т.е.  $T_{\Sigma} = T_{из}$ ,  $V = V_{из}$  и, следовательно,  $B_{\Sigma} = B_{из}$ .

Для примера рассчитаем КПД системы «винт в кольце» с идеальным коллектором ( $\xi_{кол} = 0$ ) и цилиндрическим диффузором ( $k_V = 1$ ,  $\xi_d = 0$ ).

Для такой системы в соответствии с формулой (2.3.10) относительная тяга винта  $\bar{T}_в = 0,5(1 + V/V_1)$ . Примем параметры кольца, рассмотренные в предыдущем разделе:  $\bar{b}_к = 2$ ;  $\bar{c}_к = 0,1$ ;  $C_{хрк} = 0,009$ ;  $\bar{S}_к = (2 + 0,1 \cdot 2) \cdot 2 = 4,4$ ;  $C_{хрк} \bar{S}_к = 0,009 \cdot 4,4 = 0,04$ ;

$$\eta_{и} = \frac{4C_Q}{3 + \sqrt{1 + 2(B_{\Sigma} + 0,04)}}; \quad C_Q = \frac{B_{\Sigma}}{B_{\Sigma} + 0,04} \quad (3.5.7)$$

На рис. 3.5.2 представлены зависимости  $\eta_{и}$ ,  $\eta_{и.из}$ ,  $\eta_{и}/\eta_{и.из}$  в функции от  $B$ . Здесь при  $B \rightarrow 0$  имеем  $V \rightarrow \infty$ ,  $\eta_{и} \rightarrow 0$ ,  $\eta_{и.из} \rightarrow 1$ ; при  $B \rightarrow \infty$  имеем  $V \rightarrow 0$ ,  $\eta_{и}/\eta_{и.из} \rightarrow \sqrt{2}$ . Из графика видно, что в диапазоне  $B=1,5 \dots \infty$  идеальный КПД винта в кольце выше, чем КПД винта изолированного. Особенно велик выигрыш на малых скоростях. При  $B < 0,4$  КПД винта в кольце начинает падать. Это значение  $B_{пр}$  следует понимать как границу, за которой применение винта в кольце нецелесообразно. Из формулы для  $B$  можно получить формулу предельной скорости полета, до которой выгодно применение винта в кольце:  $V_{пр} = \sqrt{\frac{2p}{\rho B_{пр}}} \approx 2,25 \sqrt{\frac{p}{\rho_0 \Delta}}$ , где  $p = \frac{T}{F}$  — удельная нагрузка на диск винта;  $\Delta$  — относительная плотность атмосферы на расчетной высоте полета. С ростом удельных нагрузок на винт  $V_{пр}$  увеличивается.

Оценим возможные значения  $p/\rho$  исходя из параметров изолированного винта:

$$\frac{p}{\rho} = \frac{1}{2} C_T (\omega R)^2 \approx \frac{C_V}{6} \sigma_7 C_{y7} (\omega R)^2 = \frac{k_{л} \bar{b}_7}{6\pi} C_V C_{y7} (\omega R)^2.$$

Примем на расчетной скорости полета  $C_V \approx 1,1$ ;  $C_{y7} \approx 0,7$ . При среднем удлинении лопасти  $\lambda = 5$  имеем  $\bar{b}_7 = 0,2$  и тогда

$$\frac{p}{\rho} = 0,0082k (\omega R)^2; \quad V_{пр} \approx \sqrt{\frac{5p}{\rho}} \approx 0,2 \omega R \sqrt{k_{л}}.$$

Так, при  $\omega R = 220$  м/с для двухлопастного винта  $V_{пр} = 62$  м/с = 220 км/ч, для трехлопастного  $V_{пр} = 270$  км/ч. Отсюда следует, что система «винт в кольце» целесообразна только для малоразмерных самолетов. В последнее время к самолетам малой авиации стали применяться жесткие требования по уровню шума. Для его снижения обычно уменьшают скорости концов лопастей винта до 180...200 м/с. Это ведет к необходимости использования трех- четырехлопастных винтов.

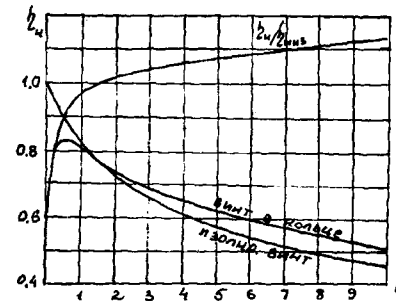


Рис. 3.5.2

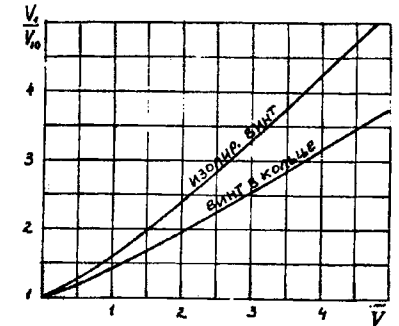


Рис. 3.5.3

Следует иметь в виду, что у винта в кольце относительный КПД будет больше, чем у изолированного винта. Поэтому скоростная граница его целесообразного применения может быть продлена на большие скорости полета, чем это следует из анализа идеального винта. Такой сравнительный анализ полезно проводить для проектируемого самолета и применяемых на нем винтов с учетом всех параметров винтовой установки.

Отметим также, что применение винта в кольце способствует увеличению скорости протекания  $V_1$  в режиме работы на месте, что приводит по сравнению с изолированным винтом к меньшему ее относительному росту по скорости полета. Действительно, если скорость  $V_1$  отнести к скорости протекания изолированного винта в режиме ра-

боты на месте  $V_{10}$  при условии, что  $T_{\Sigma} = T_{из}$ , то из формулы (2.3.2) получим

$$\tilde{V}_1 = \frac{1}{2k_V} \left( \tilde{V} + \sqrt{\tilde{V}^2 + 8k_V} \right); \quad \tilde{V}_1 = V_1 / \sqrt{\frac{T_{\Sigma}}{2\rho F}}; \quad \tilde{V} = V / \sqrt{\frac{T_{\Sigma}}{2\rho F}};$$

$$\tilde{V}_{из} = \frac{1}{2} \left( \tilde{V} + \sqrt{\tilde{V}^2 + 4} \right); \quad \tilde{V}_{из} = V_{из} / \sqrt{\frac{T_{из}}{2\rho F}}; \quad \tilde{V} = V / \sqrt{\frac{T_{из}}{2\rho F}}.$$

Относительную скорость для винта в кольце найдем, учитывая, что  $\tilde{V}_{10} = \sqrt{\frac{2}{k_V}}$ :

$$\frac{V_1}{V_{10}} = \frac{1}{\sqrt{8k_V}} \left( \tilde{V} + \sqrt{\tilde{V}^2 + 8k_V} \right).$$

На рис. 3.5.3 представлен график зависимости  $V_1/V_{10}$  для винта в кольце и изолированного винта, откуда видно, что относительный рост скорости протекания у винта в кольце существенно меньше. Поэтому если на малоразмерном самолете применяется винт фиксированного шага, то заключение его в кольцо благоприятно скажется на относительном КПД во всем диапазоне скоростей. Это продлевает границу его конкурентоспособности по сравнению с изолированным винтом до 300...350 км/ч.

#### 4. АЭРОДИНАМИКА СИСТЕМЫ «ВИНТ В КОЛЬЦЕ» В УСЛОВИЯХ КОСОЙ ОБДУВКИ

Рассмотрим работу системы «винт в кольце» в условиях косога набегания потока по отношению к оси винта. Такой режим характерен для аппаратов вертикального взлета и посадки, имеющих в качестве несущей системы установку «винт в кольце», при наборе высоты по наклонной траектории, а также для фенестронов одновинтовых вертолетов в горизонтальном полете. Предполагается, что длина канала достаточна для того, чтобы протекающий через винт поток полностью потерял на стенках канала горизонтальную составляющую скорости и на выходе из диффузора имел место полностью расширенный осевой поток с давлением в струе, равным атмосферному. Для выполнения этого условия необходимо, чтобы длина диффузора была не менее радиуса винта.

#### 4.1. Аэродинамические характеристики системы «винт в кольце» в режиме косога обтекания

Рассмотрим идеальный винт в кольце, для которого выполняются все допущения, принятые при осевой обдувке (см. раздел 2.1). На рис. 4.1.1 показана картина струйного течения воздуха через канал винта. Угол между вектором скорости набегающего потока  $V$  и плоскостью винта обозначим через  $\alpha_H$ . По аналогии с несущим винтом вертолета будем считать, что при натекании потока сверху угол атаки отрицательный ( $\alpha_H < 0$ ), при натекании снизу — положительный ( $\alpha_H > 0$ ). Вертикальный взлет соответствует  $\alpha_H = -90^\circ$ , вертикальное снижение —  $\alpha_H = 90^\circ$ .

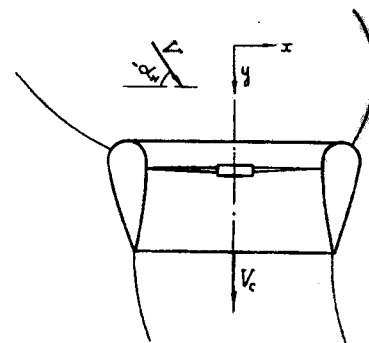


Рис. 4.1.1

Совместим ось  $y$  с осью винта. Тогда компоненты скорости набегающего потока будут

$$V_x = V \cos \alpha_H; \quad V_y = V \sin (-\alpha_H). \quad (4.1.1)$$

Скорости потока в плоскости винта и на выходе из диффузора соответственно будут  $V_1$  и  $V_c$ .

Составим уравнение импульсов в проекции на ось винта

$$T = T_x + T_y = m (V_c - V_y) = m V_c (1 - \hat{V}_y); \quad \hat{V}_y = V_y / V_c, \quad (4.1.2)$$

где

$$m = \rho F V_1 = \rho F_d V_c. \quad (4.1.3)$$

Запишем теперь уравнение Бернулли для сечений струи перед входом в канал и на выходе из диффузора:

$$p_a + \frac{\rho V^2}{2} = p_a + \frac{\rho V_c^2}{2} - p + (\xi_{вх} + \xi_d) \frac{\rho V_1^2}{2} + \xi_V \frac{\rho V^2}{2}, \quad (4.1.4)$$

где  $\xi_{вх}$  — коэффициент местных потерь на входе (в коллекторе);  $\xi_V$  — коэффициент местных потерь на поворот потока при входе в канал.

Из (4.1.4) получим выражение для тяги винта

$$T_B = pF = mV_c k_B, \quad k_B = \frac{1}{2k_V} \left[ k_V^2 + \xi_{вх} + \xi_D - (1 - \xi_V) k_V^2 \hat{V}^2 \right]. \quad (4.1.5)$$

В соответствии с принятым выше предположением считаем, что динамический напор от компоненты  $V_x$  потока полностью теряется на стенках канала, откуда следует, что  $\xi_V = \cos^2 \alpha_H$ , и тогда  $(1 - \xi_V) \hat{V}^2 = \hat{V}_y^2$ .

Относительную тягу винта получим, разделив выражение (4.1.5) на (4.1.2):

$$\frac{\bar{T}_B}{T} = \frac{T_B}{T} = \frac{k_B}{1 - \hat{V}_y} = \frac{k_V^2 (1 - \hat{V}_y^2) + \xi_{вх} + \xi_D}{2k_V (1 - \hat{V}_y)}. \quad (4.1.6)$$

Полученная формула совпадает с формулой (2.3.5) для  $\bar{T}_B$  в осевой обдувке, если в последней заменить  $\hat{V}$  на  $\hat{V}_y$ . Это относится ко всем формулам режима осевой обдувки. Учитывая сказанное, запишем все необходимые формулы для режима косоугольной обдувки:

$$\bar{T}_B = \frac{\bar{T}_{B0} - \frac{\hat{V}_y}{2k_V} \left[ \xi_{хол} (2 - \hat{V}_y) + k_V^2 \hat{V}_y \right]}{1 - \hat{V}_y}; \quad (4.1.7)$$

$$V_1 = \frac{1}{2k_V} \left( V_y + \sqrt{V_y^2 + \frac{4k_V T_B}{\rho F \bar{T}_B}} \right); \quad \tilde{V}_1 = \frac{1}{2k_V} \left( \tilde{V}_y + \sqrt{\tilde{V}_y^2 + 4k_V} \right); \quad (4.1.8)$$

$$V_c = V_1 k_V; \quad \hat{V} = V/V_c = V/V_1 k_V; \quad \hat{V}_y = V_y/V_c = V_y/V_1 k_V. \quad (4.1.9)$$

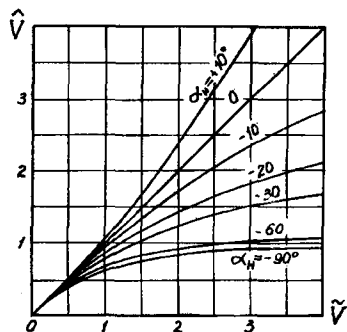


Рис. 4.1.2

На рис. 4.1.2 представлена зависимость  $\hat{V}(\tilde{V}, \alpha_H)$  для кольца с цилиндрическим диффузором ( $k_V = 1$ ), рассчитанная по формулам (4.1.9), (4.1.8). Из приведенных формул, в частности, следует, что в режиме горизонтального полета с нулевым углом атаки ( $\alpha_H = 0$ ,  $V_y = 0$ ) относительная тяга винта не зависит от скорости и остается такой же, как в режиме висения ( $T_B = \bar{T}_{B0}$ ). Заметим, что для коротких колец это условие не выполняется, т.к. в канале поток

выпрямляется не полностью и винт частично попадает в косую обдувку.

Таким образом, из полученных формул следует, что расчет аэродинамических характеристик системы «винт в кольце» в режиме косоугольной обдувки ведется по тому же алгоритму, что и в режиме осевой обдувки (см. раздел 3.4) при заданной осевой компоненте скорости  $V_y = V \sin(-\alpha_H)$  ( $\alpha_H$  подставляется со своим знаком). Особенность косоугольного обтекания проявляется только в том, что на входе в канал вследствие различных условий обтекания передней и задней кромок коллектора возникает кабрирующий момент.

#### 4.2. Продольная сила и момент, действующие на корпус ЛА с подъемной системой «винт в кольце»

На ЛА, выполненный по схеме «винт в кольце», в условиях косоугольной обдувки кроме силы тяги действуют продольная сила  $Q_x$  и момент  $M_z$ . Рассмотрим продольное движение ЛА по криволинейной траектории. Представим сложное движение в виде поступательного с компонентами скорости  $V_x$ ,  $V_y$  и вращательного вокруг центра масс с угловой скоростью  $\omega_z$  (рис. 4.2.1). Движение с компонентой скорости  $V_y$  продольной силы и момента не вызывает. Рассмотрим сначала движение с компонентой скорости  $V_x$ . В этом случае в передней части поверхности коллектора скорости невозмущенного потока складываются со скоростями подсосывания, а в задней — вычитаются. Асимметрия обтекания передней и задней кромок коллектора приведет к разности сил давления, распределенных по его поверхности, вследствие чего возникает кабрирующий момент  $M_z$  (рис. 4.2.2).

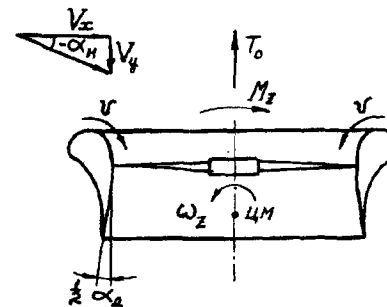


Рис. 4.2.1

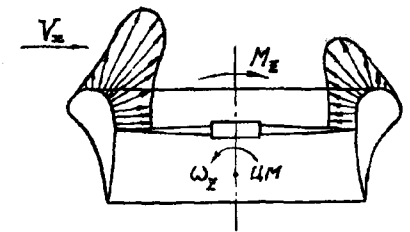


Рис. 4.2.2

Для его определения примем следующую расчетную схему. Заменим коллектор, создающий подъемную силу, присоединенным кольцевым вихрем циркуляции  $\Gamma_k$  и радиуса  $R_k$ , расположенным на расстоянии  $y_k$  от входа в проточную часть кольца. Проточную и диффузорную части кольца, а также струю приближенно заменим вихревым цилиндром, покрытым непрерывным слоем кольцевых вихрей с погонной циркуляцией по образующей  $\gamma$ .

Вихревой цилиндр моделирует подсосывающий эффект винта, а за пределами диффузора — струю с постоянной скоростью по сечению  $V_c$ . Приближенно полагаем, что погонная циркуляция вихревого слоя постоянна вдоль образующей цилиндра:  $\gamma = V_c - V_y$ . Радиус вихревого цилиндра при малых углах раствора диффузора можно принять равным радиусу винта (рис. 4.2.3). Известно, что по возмущающим воздействиям на внешнюю область пространства вихревой цилиндр аналогичен диску стоков с равномерным распределением их интенсивности. Причем плотность распределения стоков  $q$  равна погонной циркуляции  $\gamma$ .

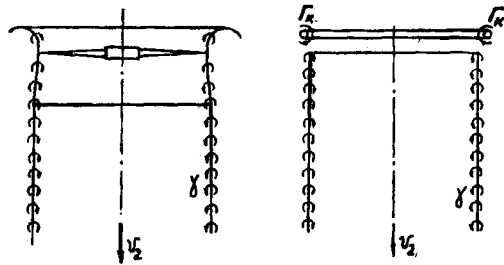


Рис. 4.2.3

Таким образом, математическая модель винта в кольце в простейшем случае может рассматриваться как совокупность присоединенного кольцевого вихря, заменяющего коллектор, и диска стоков, воспроизводящего подсосывающий эффект винта (рис. 4.2.4).

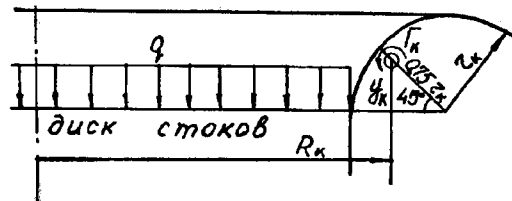


Рис. 4.2.4

Расположение оси присоединенного вихря в сечении коллектора должно соответствовать точке максимального разрежения на его поверхности. На экспериментальных графиках распределения давления по поверхности коллектора, приведенных в [14, с. 38], этому условию соответствует угол  $\varphi_k = 45^\circ$ . Примем расстояние от центра присоединенного вихря до поверхности коллектора равным  $0,25 r_k$  (рис. 4.2.4). Тогда  $\bar{R}_k$  и  $\bar{y}_k$ , определяющие взаиморасположение присоединенного вихря и диска стоков, вычисляются по следующим формулам:

$$\bar{R}_k = 1 + \left(1 - \frac{3}{8}\sqrt{2}\right)\bar{r}_k = 1 + 0,47\bar{r}_k; \quad (4.2.1)$$

$$\bar{y}_k = \frac{3}{8}\sqrt{2}\bar{r}_k = 0,53\bar{r}_k. \quad (4.2.2)$$

Диск стоков индуцирует на оси присоединенного вихря компоненту радиальной скорости  $v_r$ , которая в соответствии с теоремой Жуковского приводит к возникновению подъемной силы. По условию задачи эта сила равна подъемной силе кольца:

$$T_k = \rho \Gamma_k v_r 2\pi R_k. \quad (4.2.3)$$

Отсюда

$$\Gamma_k = T_k / 2\pi R_k v_r. \quad (4.2.4)$$

В формулу (4.2.4) следует подставлять модуль скорости  $v_r$ .

Для диска источников единичного радиуса с плотностью распределения  $q = \gamma$  компонента скорости  $v_r$  определяется по формуле [3]

$$v_r = \frac{\gamma}{2\pi} k (K - 2D), \quad D = (K - E) / k^2,$$

где  $K, E, D$  — полные эллиптические интегралы;  $k$  — модуль интегралов. Для  $v_r$  на оси присоединенного вихря

$$k = 2 \sqrt{\bar{R}_k} / \sqrt{\bar{y}_k^2 + (\bar{R}_k + 1)^2}.$$

При малых  $\bar{y}_k$ , что соответствует  $\bar{r}_k \leq 0,2$ , модуль  $k$  близок к единице, и тогда

$$D \approx K - E, \quad K - 2D = 2E - K.$$



По приближенным формулам для эллиптических интегралов при  $k \rightarrow 1$  получим [7]

$$E \approx 1; \quad K \approx \ln \frac{4}{\sqrt{1-k^2}} = \ln \frac{4 \sqrt{y_k^2 + (1 + \bar{R}_k)^2}}{\sqrt{y_k^2 + (\bar{R}_k - 1)^2}}.$$

Учитывая формулы (4.2.1) и (4.2.2) для  $\bar{R}_k$  и  $\bar{y}_k$  и пренебрегая малыми членами в числителе, получаем

$$|v_r| = \frac{\gamma}{2\pi} \left[ \ln \frac{4(2 + 0,47\bar{r}_k)}{0,708\bar{r}_k} - 2 \right] = \frac{\gamma}{2\pi} \left[ \ln \left( \frac{2}{\bar{r}_k} + 0,47 \right) - 0,2684 \right]. \quad (4.2.5)$$

Подставим (4.2.5) в (4.2.4):

$$\Gamma_k = T_k / \rho \gamma R_k \left[ \ln \left( \frac{2}{\bar{r}_k} + 0,47 \right) - 0,2684 \right]. \quad (4.2.6)$$

Тягу кольца найдем по уравнению импульсов

$$T_k = T \bar{T}_k = \bar{T}_k m (V_c - V_y) = (1 - \bar{T}_b) m \gamma. \quad (4.2.7)$$

Подставим (4.2.7) в (4.2.6):

$$\Gamma_k = (1 - \bar{T}_b) m / \rho R_k \left[ \ln \left( \frac{2}{\bar{r}_k} + 0,47 \right) - 0,2684 \right], \quad (4.2.8)$$

где  $m$  — секундный массовый расход воздуха через винт в кольце:

$$m = \rho \pi R^2 V_1. \quad (4.2.9)$$

Полученная формула для  $\Gamma_k$  позволяет вычислить момент от аэродинамических сил, возникающих на кольцевом присоединенном вихре при обдувке его плоскопараллельным потоком с компонентой скорости  $V_x$  (рис. 4.2.5):

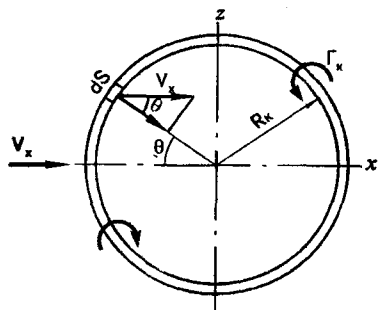


Рис. 4.2.5

$$M_z = \int dM_z, \quad (4.2.10)$$

где  $dM_z$  — элементарный момент относительно оси  $z$  от элемента присоединенного вихря длиной  $ds$ :

$$dM_z = dY R_k \cos \Theta.$$

Подъемную силу  $dY$  вычислим по формуле Жуковского:

$$dY = \rho \Gamma_k V_x \cos \Theta ds.$$

Подставим сюда  $ds = R d\Theta$  и окончательно из (4.2.10) получим

$$M_z = 2 \int_0^\pi dM_z = 2 \rho \Gamma_k V_x R_k^2 \int_0^\pi \cos^2 \Theta d\Theta = \rho \Gamma_k R_k^2 V_x. \quad (4.2.11)$$

Подставив в (4.2.11)  $\Gamma_k$  по формуле (4.2.8) и радиус вихревого кольца  $R_k$  по формуле (4.2.1), получим расчетную формулу для  $M_z$ :

$$M_z = \frac{\pi (1 + 0,47\bar{r}_k)}{\ln \left( \frac{2}{\bar{r}_k} + 0,47 \right) - 0,2684} (1 - \bar{T}_b) m R V_x. \quad (4.2.12)$$

Здесь массовый расход воздуха  $m$ , определяемый формулой (4.2.9), и относительная тяга винта  $\bar{T}_b$  (с учетом зазора) найдутся по формулам предыдущего раздела. В частности, в горизонтальном полете с нулевым углом атаки для наиболее рациональных размеров кольца  $\bar{r}_k = 0,15$ ;  $\alpha_d = 12^\circ$ ;  $\bar{H}_d = 0,5$  найдем (см. разд. 2.2 и 4.1)  $\bar{T}_b = 0,55$ ;  $k_V = 0,9$ ;  $V_1 = \sqrt{T/k_V \rho \pi R^2}$ . Из (4.2.12) получим рабочую формулу

$$M_z \approx 0,3 \sqrt{\rho T} D^2 V_x. \quad (4.2.13)$$

Таким образом, при тяге, равной весу ЛА, продольный момент, возникающий на коллекторе, пропорционален квадрату диаметра винта и скорости полета, т.е. по скорости полета  $M_z$  растет по линейному закону. Поэтому у таких аппаратов на больших скоростях полета возникают проблемы с балансировкой, поскольку не хватает рулей. Особенно трудно эта задача решается на аппаратах типа «летающая платформа».

Если высота кольца достаточно велика ( $\bar{H} \approx 1$ ), то проблема балансировки может быть решена с помощью выбора рациональной формы корпуса и центровки ЛА. Суммарный продольный момент  $M_z$ , действующий на корпус ЛА, складывается из момента от подъемных сил на коллекторе  $M_{z_k}$  и момента от внешних сил сопротивления, действующих на корпус ЛА.

Продольная сила сопротивления  $Q_c$  наружной части корпуса от обдувки набегающим потоком определяется по формуле ( $\alpha_n = 0$ )

$$Q_c = C_x S \frac{\rho V_x^2}{2}. \quad (4.2.14)$$

Момент  $M_{zc}$  от силы  $Q_c$  относительно центра масс найдется как произведение силы  $Q_c$  на расстояние  $y_c$  от точки приложения силы  $Q_c$  (центра давления) до центра масс. Суммарный продольный момент будет

$$M_z = M_{zk} + M_{zc} = M_{zk} + Q_c y_c. \quad (4.2.15)$$

Если координата  $y_c$  отрицательна, т.е. центр давления сил внешнего сопротивления лежит ниже центра масс, то момент  $M_{zc}$  — пикирующий и будет компенсировать момент от подъемных сил на коллекторе. Так как моменты  $M_{zk}$  и  $M_{zc}$  меняются по скорости соответственно по линейному и квадратичному законам, то удачной компоновкой аппарата можно добиться, чтобы на расчетной скорости суммарный момент был равен нулю (рис. 4.2.6).

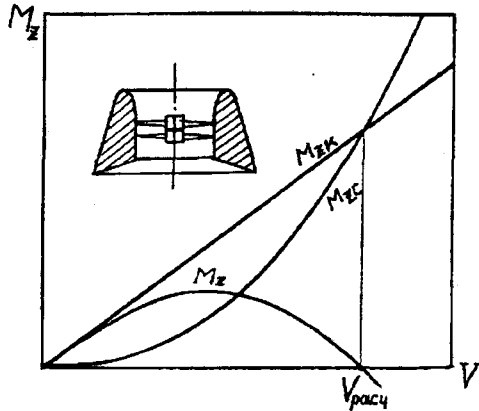


Рис. 4.2.6

Рассмотрим теперь вращение аппарата относительно центра масс с угловой скоростью  $\omega_z$  (рис. 4.2.7). В этом случае вихревое кольцо, являющееся математическим эквивалентом коллектора, находится на расстоянии  $y_{ц.м}$  от центра масс. Из рис. 4.2.4 следует

$$\bar{y}_{ц.м} = \bar{y} - \left(1 - \frac{3}{8}\sqrt{2}\right) \bar{r}_k = \bar{y} - 0,47\bar{r}_k, \quad (4.2.16)$$

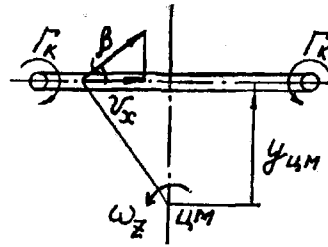


Рис. 4.2.7

где  $\bar{y}$  — относительное расстояние от центра масс до верхнего среза кольца.

Из (рис. 4.2.7) видно, что элементы вихревого кольца обдуваются компонентой скорости  $v_x$ , одинаковой для всех элементов, причем

$$v_x = \omega_z R \bar{y}_{ц.м} = \omega_z R (\bar{y} - 0,47\bar{r}_k). \quad (4.2.17)$$

Подставив (4.2.17) в (4.2.12), получим расчетную формулу

$$M_{z\omega} = \frac{\pi (1 + 0,47\bar{r}) (\bar{y} - 0,47\bar{r}_k)}{\ln \left( \frac{2}{\bar{r}_k} + 0,47 \right) - 0,2684} (1 - \bar{T}_b) m R^2 \omega_z. \quad (4.2.18)$$

В частности, в горизонтальном полете при  $\alpha_n = 0$  для принятых выше параметров кольца получим рабочую формулу

$$M_{z\omega} = 0,15 (\bar{y} - 0,07) \sqrt{\rho T} D^3 \omega_z. \quad (4.2.19)$$

Здесь  $\omega_z$  направлено на пикирование, а  $M_{z\omega}$  — на кабрирование, что свидетельствует о статической устойчивости аппарата в горизонтальном полете.

Определим теперь суммарную продольную силу  $Q_x$ , действующую на корпус аппарата. Она складывается из силы внешнего сопротивления  $Q_c$  и сил давления  $Q_k$ , действующих на внутренние стенки канала вследствие поворота подсасываемого винтом потока:

$$Q_x = Q_c + Q_k. \quad (4.2.20)$$

Сила  $Q_c$  определяется по формуле (4.2.14), а сила  $Q_k$  может быть найдена по потерянному количеству движения в проекции на ось  $x$  секундной массы воздуха, поступающего в канал:

$$Q_k = m V_x. \quad (4.2.21)$$

Эксперимент и расчет показывают, что глубоко расположенный в канале винт в условиях бокового набегающего потока с нулевым углом атаки прокачивает через канал ту же массу воздуха, что и на режиме висения. Именно поэтому у этих систем практически не наблюдается провала потребной мощности по скорости горизонтального полета, как это имеет место у свободного несущего винта. Тогда  $m = \rho \pi R^2 V_1 = \sqrt{T \rho} \pi R^2 / k_V$ , и для  $Q_k$  получим

$$Q_k = \sqrt{\rho T / k_V} R V_x. \quad (4.2.22)$$

Сила импульсного сопротивления существенно увеличивает сопротивление корпуса аппарата и требует для своего преодоления дополнительной движительной силы.

## 5. МЕТОДЫ КОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ В ТЕОРИИ СИСТЕМЫ «ВИНТ В КОЛЬЦЕ»

### 5.1. Основные сведения из теории конформных отображений

Конформные отображения являются важным разделом в теории функций комплексного переменного и представляют собой мощный математический аппарат, позволяющий получить аналитические решения многих задач аэрогидродинамики в двумерном потоке, решить которые обычным путем либо очень трудно, либо вообще невозможно.

Если функция  $F(z)$  комплексного переменного  $z = x + iy$  аналитическая (регулярная), т.е. дифференцируема в каждой точке плоскости  $z$ , то она удовлетворяет условиям Коши — Римана. Это позволяет для потенциального потока ввести понятие комплексного потенциала или характеристической функции течения

$$w(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y), \quad (5.1.1)$$

где  $\varphi(x, y)$  и  $\psi(x, y)$  — соответственно потенциал и функция тока, для которых, как известно, условия Коши — Римана выполняются:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (5.1.2)$$

Производная комплексного потенциала есть комплексная скорость

$$\bar{v} = \frac{\partial w}{\partial z} = v_x - i v_y,$$

представляющая собой сопряженную со скоростью  $v = v_x + i v_y$  комплексную величину. В дальнейшем для комплексной скорости черту сверху будем опускать.

Регулярность характеристической функции  $w(z)$  может нарушаться в особых точках, где  $w(z)$  не имеет производной.

В качестве таких особенностей обычно рассматриваются простейшие течения: источник (сток), вихрь, диполь. Приведем выражения комплексного потенциала для источника (стока) мощностью  $Q$  и вихря с циркуляцией  $\Gamma$ , помещенных в точке  $z = a$ :

$$w_{\text{и}} = \frac{Q}{2\pi} \ln(z - a), \quad w_{\text{в}} = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln(z - a). \quad (5.1.3)$$

Так как непосредственное определение комплексного потенциала при обтекании заданных контуров представляет значительные трудности, то его можно осуществить косвенным путем, отобразив конформно плоскость  $z$  на некоторую новую плоскость  $\zeta = \xi + i\eta$  с помощью отображающей функции  $\zeta = f(z)$  или  $z = f(\zeta)$ , которую подбирают таким образом, чтобы в плоскости  $\zeta$  для отображенного контура обтекания (например, окружности) нахождение комплексного потенциала не представляло особых трудностей.

Поскольку в физической и отображенной плоскостях комплексный потенциал и циркуляция в сходственных точках и контурах сохраняют свои значения, то задачу можно считать решенной, если найдена отображающая функция.

Выпишем некоторые соотношения, используемые в теории комплексного переменного:

$$e^{i\Theta} = \cos \Theta + i \sin \Theta. \quad (5.1.4)$$

Отсюда возможно иное представление комплексного числа  $z$  и скорости  $v$ :

$$z = x + iy = |z| (\cos \Theta + i \sin \Theta) = |z| e^{i\Theta}; \quad (5.1.5)$$

$$\bar{v} = v_x - i v_y = |v| (\cos \varphi - i \sin \varphi) = |v| e^{-i\varphi}. \quad (5.1.6)$$

Здесь  $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$  и  $|v| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$  — модули комплексных чисел.

Гиперболический синус и косинус выражаются формулами

$$\operatorname{sh} z = \frac{1}{2} (e^z - e^{-z}), \quad \operatorname{ch} z = \frac{1}{2} (e^z + e^{-z}). \quad (5.1.7)$$

Логарифмическая функция комплексного числа обладает следующими свойствами:

$$\ln z = \ln |z| e^{i(\Theta + 2\pi k)} = \ln |z| + i(\Theta + 2\pi k),$$

$$k = \pm 0, 1, 2, 3 \dots \quad (5.1.8)$$

Как видим, логарифм — многозначная функция с периодом  $2\pi i$ . Отображающая функция  $\zeta = e^z$  переводит плоскость  $\zeta$  в бесконечную последовательность полос шириной  $2\pi i$  в плоскости  $z$ .

При каждом обходе вокруг точки  $\zeta = 0$  в плоскости  $z$  мы перемещаемся на один шаг. Для достижения однозначности отображения плоскость  $\zeta$  может рассматриваться как многолистная поверхность, разрезанная вдоль действительной отрицательной оси. При каждом обходе осуществляется переход через разрез на следующий лист поверхности  $\zeta$ . Такая поверхность называется римановой.

В этом разделе мы рассмотрим две важные в теории винта в кольце задачи: аэродинамические характеристики решеток профилей и потери подъемной силы на концах лопастей (концевые потери) в зависимости от зазора между лопастями и стенками канала.

## 5.2. Аэродинамические характеристики решеток профилей

Теория решеток изложена в работах [8, 9]. Рассмотрим в плоскости  $z = x + iy$  решетку профилей, сдвинутых относительно друг друга на период  $le^{i\varphi}$  (рис. 5.2.1). Ось  $x$  направим по аэродинамической хорде профиля. Тогда при течении в направлении оси  $x$  подъемная сила профиля будет равна нулю, т.е. соответствовать условиям бесциркуляционного обтекания. Угол  $\varphi$ , определяющий «вынос» решетки, соответствует углу установки лопастей винта,  $b$  — хорда профиля,  $\frac{l}{b}$  — относительный шаг решетки (обратную величину  $\frac{b}{l}$  будем называть густотой решетки).

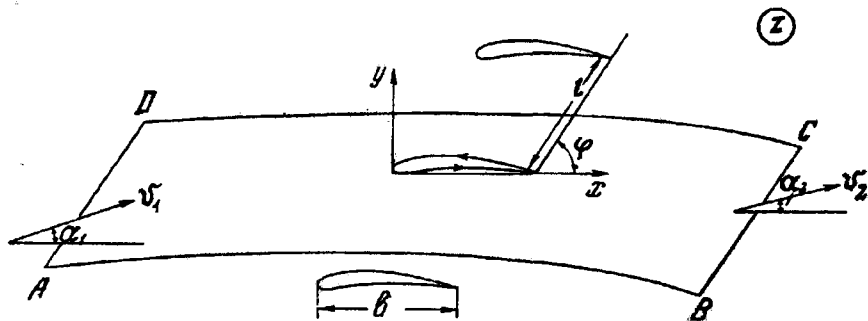


Рис. 5.2.1

Решетка обтекается потенциальным потоком несжимаемой жидкости. Вектор скорости потока и его угол наклона к оси  $x$  в бесконечности перед и за решеткой соответственно будут  $v_1, \alpha_1$  и  $v_2, \alpha_2$ . Оче-

видно, что циркуляция вокруг профиля равна циркуляции по контуру  $ABCD$ , в котором контуры  $AD$  и  $BC$  удалены в  $\pm \infty$  и равны периоду решетки  $le^{i\varphi}$ , а контуры  $AB$  и  $DC$  есть конгруэнтные линии тока, циркуляция по которым взаимно уничтожается. Следовательно,

$$\Gamma = (v_2 e^{-i\alpha_2} - v_1 e^{-i\alpha_1}) le^{i\varphi}. \quad (5.2.1)$$

Отсюда следуют уравнение расходов и уравнение циркуляций по контуру  $ABCD$ :

$$\left. \begin{aligned} v_1 \sin(\varphi - \alpha_1) - v_2 \sin(\varphi - \alpha_2) &= 0; \\ -\Gamma &= \Gamma_1 + \Gamma_2 = v_1 \cos(\varphi - \alpha_1) - v_2 \cos(\varphi - \alpha_2). \end{aligned} \right\} \quad (5.2.2)$$

При бесциркуляционном обтекании ( $\Gamma = 0, \Gamma_1 = -\Gamma_2$ ) скорости жидкости в бесконечности перед и за решеткой одинаковы ( $v_1 = v_2 = v_0, \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ ). При чисто циркуляционном обтекании  $\Gamma_1 = \Gamma_2 = -\frac{\Gamma}{2}$ .

Отобразим конформно внешность решеток профилей в плоскости  $z$  на внутренность окружности единичного радиуса в плоскости  $\zeta$  (рис. 5.2.2). Эту область следует рассматривать как риманову поверхность, состоящую из бесконечного числа листов, соединенных в точках ветвления  $\zeta = \pm \varepsilon$  ( $\varepsilon < 1$  — положительная действительная величина), соответствующих точкам  $z = \mp \infty$ .

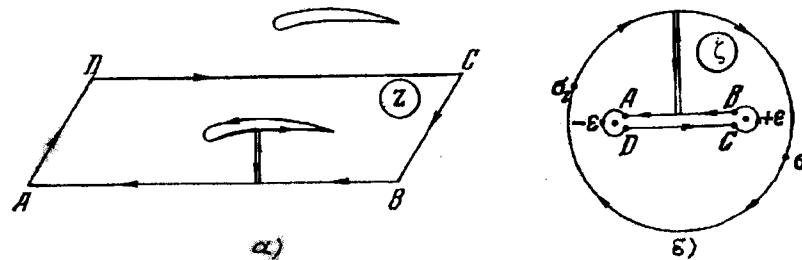


Рис. 5.2.2

Область в плоскости  $z$ , заключенная между контуром  $ABCD$  и контуром профиля, переходит в плоскости  $\zeta$  во внутренность окружности  $|\zeta| < 1$  с разрезом между точками  $\zeta = \pm \varepsilon$ . Контур профиля переходит в контур окружности, а конгруэнтные кривые  $AB, DC$  — в

разрез. Переход на один шаг решетки в плоскости  $z$  соответствует в плоскости  $\zeta$  переходу через разрез на другой лист римановой поверхности. Таким образом, функция  $z(\zeta)$ , реализующая конформное отображение периодической решетки профилей, и величина параметра  $\varepsilon$  определяются единственным образом.

В плоскости  $\zeta$  течение внутри окружности в соответствии с формулами (5.2.2) обеспечивается особенностями: вихресточник ( $\zeta = -\varepsilon$ ) и вихресток ( $\zeta = +\varepsilon$ ).

Так как комплексный потенциал течения  $w(\zeta) = \Phi + i\Psi$  — аналитическая функция и на круге  $|\zeta| = 1$  функция тока  $\Psi = \text{const}$ , то функция  $w(\zeta)$  через круг продолжается на всю плоскость комплексного переменного  $\zeta = r e^{i\sigma}$ . Для обеспечения во внешности круга течения, зеркально отраженного относительно окружности, необходимо поместить в точках  $\zeta = \pm \varepsilon^{-1}$  сток и источник той же мощности и вихри с обратной циркуляцией.

В соответствии с (5.2.2)

$$Q_1 = l v_1 \sin(\varphi - \alpha_1), \quad Q_2 = l v_2 \sin(\varphi - \alpha_2),$$

$$\Gamma_1 = l v_1 \cos(\varphi - \alpha_1), \quad \Gamma_2 = l v_2 \cos(\varphi - \alpha_2).$$

Составим комплексный потенциал течения, учитывая формулы (5.1.3) и полагая  $Q_1 = Q_2 = Q$ ,  $\Gamma_2 = -\Gamma - \Gamma_1$ :

$$w(\zeta) = \frac{Q - i\Gamma_1}{2\pi} \ln \frac{\zeta + \varepsilon}{\zeta - \varepsilon} + \frac{Q + i\Gamma_1}{2\pi} \ln \frac{\zeta + \varepsilon^{-1}}{\zeta - \varepsilon^{-1}} - \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln \frac{\zeta - \varepsilon}{\zeta - \varepsilon^{-1}}.$$

Или, учитывая формулы для  $Q = Q_1$  и  $\Gamma_1$

$$w(\zeta) = \frac{l v_1}{2\pi i} \left( e^{i(\varphi - \alpha_1)} \ln \frac{\zeta + \varepsilon}{\zeta - \varepsilon} - e^{-i(\varphi - \alpha_1)} \ln \frac{\zeta + \varepsilon^{-1}}{\zeta - \varepsilon^{-1}} \right) - \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln \frac{\zeta - \varepsilon}{\zeta - \varepsilon^{-1}} = \frac{l v_1}{2\pi} \left[ \sin(\varphi - \alpha_1) \ln \frac{(\zeta + \varepsilon)(\zeta + \varepsilon^{-1})}{(\zeta - \varepsilon)(\zeta - \varepsilon^{-1})} - i \cos(\varphi - \alpha_1) \ln \frac{(\zeta + \varepsilon)(\zeta - \varepsilon^{-1})}{(\zeta + \varepsilon^{-1})(\zeta - \varepsilon)} \right] - \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln \frac{\zeta - \varepsilon}{\zeta - \varepsilon^{-1}}. \quad (5.2.3)$$

Определим комплексный потенциал на окружности, полагая  $\zeta = e^{i\sigma}$ .

Подставим сюда

$$\ln \frac{(\zeta + \varepsilon)(\zeta + \varepsilon^{-1})}{(\zeta - \varepsilon)(\zeta - \varepsilon^{-1})} = \ln \frac{\varepsilon^2 + 2\varepsilon \cos \sigma + 1}{\varepsilon^2 - 2\varepsilon \cos \sigma + 1};$$

$$\ln \frac{\zeta + \varepsilon}{\zeta + \varepsilon^{-1}} = \ln \varepsilon + i \left( \text{arctg} \frac{\sin \sigma}{\cos \sigma + \varepsilon} - \text{arctg} \frac{\sin \sigma}{\cos \sigma + \varepsilon^{-1}} \right);$$

$$\ln \frac{\zeta - \varepsilon}{\zeta - \varepsilon^{-1}} = \ln \varepsilon + i \left( \text{arctg} \frac{\sin \sigma}{\cos \sigma - \varepsilon} - \text{arctg} \frac{\sin \sigma}{\cos \sigma - \varepsilon^{-1}} \right).$$

Окончательно получим выражение комплексного потенциала на окружности единичного радиуса:

$$w(\sigma) = \Phi(\sigma) + i\Psi(\sigma),$$

$$\Phi = \frac{l v_1}{2\pi} \left[ \sin(\varphi - \alpha_1) L + \cos(\varphi - \alpha_1) (M - N) \right] - \frac{\Gamma}{2\pi} N;$$

$$\Psi = \frac{l v_1}{2} \sin(\varphi - \alpha_1) + \frac{\Gamma}{2\pi} \ln \varepsilon;$$

$$L = \ln \frac{\varepsilon^2 + 2\varepsilon \cos \sigma + 1}{\varepsilon^2 - 2\varepsilon \cos \sigma + 1};$$

$$M = \text{arctg} \frac{\sin \sigma}{\cos \sigma + \varepsilon} - \text{arctg} \frac{\sin \sigma}{\cos \sigma + \varepsilon^{-1}};$$

$$N = \text{arctg} \frac{\sin \sigma}{\cos \sigma - \varepsilon} - \text{arctg} \frac{\sin \sigma}{\cos \sigma - \varepsilon^{-1}}. \quad (5.2.4)$$

Как видим, функция тока  $\Psi$  имеет постоянное значение, следовательно, окружность является линией тока. В выражении для потенциала  $\Phi$ , как следует из рис. 5.2.3, скорость  $v_1$  далеко перед решеткой есть векторная сумма скорости невозмущенного потока  $v_\infty$  и скорости возмущений  $v_p = -\frac{\Gamma}{2l}$  от профилей решетки, которая в бесконечности будет такой же, как от цепочки вихрей с циркуляцией  $-\Gamma$  и с шагом  $l$  [1]. Из рис. 5.2.3 следуют соотношения

$$v_1 \cos(\varphi - \alpha_1) = v_\infty \cos(\varphi - \alpha_\infty) - \frac{\Gamma}{2l};$$

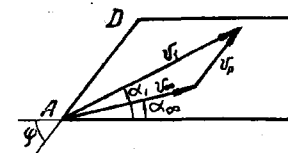


Рис. 5.2.3

$$v_1 \sin(\varphi - \alpha_1) = v_\infty \sin(\varphi - \alpha_\infty).$$

Подставим эти соотношения в выражение для потенциала:

$$\Phi = \frac{lv_\infty}{2\pi} \left[ \sin(\varphi - \alpha_\infty)L + \cos(\varphi - \alpha_\infty)(M - N) \right] - \frac{\Gamma}{4\pi} (M + N). \quad (5.2.5)$$

Теперь получим выражение для скорости  $v_s$  на окружности единичного радиуса:

$$v_s = \frac{d\Phi}{ds} = \frac{d\Phi}{d\sigma} = \frac{lv_\infty}{2\pi} \left[ \sin(\varphi - \alpha_\infty)L' + \cos(\varphi - \alpha_\infty)(M' - N') \right] - \frac{\Gamma}{4\pi} (M' + N'). \quad (5.2.6)$$

Выполнив дифференцирование в (5.2.6), получим

$$v_s = -\frac{4\varepsilon lv_\infty}{2\pi} \frac{[(1+\varepsilon^2)\sin(\varphi - \alpha_\infty)\sin\sigma + (1-\varepsilon^2)\cos(\varphi - \alpha_\infty)\cos\sigma]}{(1+\varepsilon^2)^2 - 4\varepsilon^2 \cos^2\sigma} - \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{(1+\varepsilon^2)(1-\varepsilon^2)}{(1+\varepsilon^2)^2 - 4\varepsilon^2 \cos^2\sigma}. \quad (5.2.7)$$

Входящий в (5.2.7) угловой параметр  $\sigma$  должен быть таким, чтобы обеспечить положение критической точки  $v_s = 0$  на задней кромке профиля (условие Чаплыгина — Жуковского). Он легко находится из условий бесциркуляционного обтекания, когда  $\alpha_\infty = 0$ . Параметры задней  $\sigma_1$  и передней  $\sigma_2$  критических точек найдутся из уравнения

$$(1+\varepsilon^2)\sin\varphi\sin\sigma + (1-\varepsilon^2)\cos\varphi\cos\sigma = 0,$$

решив которое найдем

$$\sigma_1 = \sigma_0, \quad \sigma_2 = \sigma_0 + \pi;$$

$$\sin\sigma_0 = -\frac{(1-\varepsilon^2)\cos\varphi}{\sqrt{1+\varepsilon^4 - 2\varepsilon^2\cos 2\varphi}}; \quad \cos\sigma_0 = \frac{(1+\varepsilon^2)\sin\varphi}{\sqrt{1+\varepsilon^4 - 2\varepsilon^2\cos 2\varphi}}. \quad (5.2.8)$$

При циркуляционном обтекании профиля в решетке ( $\alpha_\infty \neq 0$ ) потребное для выполнения условия Чаплыгина — Жуковского значение циркуляции  $\Gamma$  определится из формулы (5.2.7), в которой следует положить  $v_s = 0$  и  $\sigma = \sigma_0$ :

$$\Gamma = -4\varepsilon lv_\infty \left( \frac{\sin(\varphi - \alpha_\infty)\sin\sigma_0}{(1-\varepsilon^2)} + \frac{\cos(\varphi - \alpha_\infty)\cos\sigma_0}{(1+\varepsilon^2)} \right).$$

Подставив сюда  $\sin\sigma_0$  и  $\cos\sigma_0$  из (5.2.8), получим

$$\Gamma = -\frac{4\varepsilon lv_\infty \sin\alpha_\infty}{\sqrt{1 - 2\varepsilon^2 \cos 2\varphi + \varepsilon^4}}. \quad (5.2.9)$$

Подъемная сила  $Y$  определится по формуле Жуковского, которая верна как для профиля в решетке, так и для изолированного профиля:

$$Y = -i\rho v_\infty \Gamma; \quad Y_0 = -i\rho v_\infty \Gamma_0. \quad (5.2.10)$$

Следовательно, отношение подъемных сил профиля в решетке и изолированного профиля при равных значениях  $v_\infty$  равно отношению их циркуляций:

$$K = \frac{Y}{Y_0} = \frac{C_y}{C_{y_0}} = \frac{\Gamma}{\Gamma_0}. \quad (5.2.11)$$

Отношение (5.2.11) будет определено, если в (5.2.9) известна связь между  $\varepsilon$  и параметрами решетки: плотностью  $\frac{b}{l}$  и геометрическими характеристиками профиля. Для установления этой связи должна быть найдена отображающая функция  $z(\zeta)$ .

Рассмотрим наиболее простой случай — решетку пластинок. В теории решеток она имеет важное значение, поскольку всякая решетка может рассматриваться как решетка пластинок плюс дополнительная функция, придающая профилю толщину и форму. Однако для тонких малоизогнутых профилей можно ограничиться решением для пластинок.

Для нахождения отображающей функции сравним бесциркуляционные течения в обеих плоскостях. В плоскости  $z$  имеем  $w = v_\infty z$ , в плоскости  $\zeta$  в комплексном потенциале, определяемом формулой (5.2.3), следует положить  $\alpha_1 = 0$ ,  $v_1 = v_\infty$ ,  $\Gamma = 0$ . Тогда

$$z = \frac{l}{2\pi} \left[ \sin\varphi \ln \frac{(\zeta + \varepsilon)(\zeta + \varepsilon^{-1})}{(\zeta - \varepsilon)(\zeta - \varepsilon^{-1})} - i \cos\varphi \ln \frac{(\zeta + \varepsilon)(\zeta - \varepsilon^{-1})}{(\zeta + \varepsilon^{-1})(\zeta - \varepsilon)} \right]. \quad (5.2.12)$$

Формула (5.2.12) дает неоднозначное отображение плоскости  $\zeta$  на плоскость  $z$ . Действительно, логарифм имеет комплексный период  $2\pi i$ .

Поэтому при каждом обходе вокруг точки  $\epsilon$  функция  $z$  получает приращение  $le^{i\varphi}$ . Таким образом, в плоскости  $z$  реализуется решетка пластинок.

Найдем теперь связь между параметрами круга  $\sigma_0$  и  $\epsilon$  и параметрами решетки  $b$  и  $l$ . Отображающая функция круга единичного радиуса в плоскости  $\zeta$  на пластинку в плоскости  $z$  имеет вид (см. (5.2.4))

$$z = x = \frac{l}{2\pi} [\sin \varphi L + \cos \varphi (M - N)].$$

Теперь найдем ширину пластинки в плоскости  $z$ :

$$b = x(e^{i\sigma_0}) - x(e^{i(\sigma_0+\pi)}) = 2x(e^{i\sigma_0}),$$

следовательно,

$$b = \frac{l}{\pi} \left[ \sin \varphi \ln \frac{1 + 2\epsilon \cos \sigma_0 + \epsilon^2}{1 - 2\epsilon \cos \sigma_0 + \epsilon^2} - 2 \cos \varphi \operatorname{arctg} \frac{2\epsilon \sin \sigma_0}{1 - \epsilon^2} \right] \quad (5.2.13)$$

Подставив сюда  $\sin \sigma_0$  и  $\cos \sigma_0$  по (5.2.8), получим

$$\frac{b}{l} = \frac{1}{\pi} \left[ \sin \varphi \ln \frac{\sqrt{1 - 2\epsilon^2 \cos 2\varphi + \epsilon^4} + 2\epsilon \sin \varphi}{\sqrt{1 - 2\epsilon^2 \cos 2\varphi + \epsilon^4} - 2\epsilon \sin \varphi} + 2 \cos \varphi \operatorname{arctg} \frac{2\epsilon \cos \varphi}{\sqrt{1 - 2\epsilon^2 \cos 2\varphi + \epsilon^4}} \right]. \quad (5.2.14)$$

График зависимости параметра  $\epsilon$  от густоты решетки  $\frac{b}{l}$  представлен на рис. 5.2.4. Для редких решеток ( $\epsilon \rightarrow 0$ ) формула (5.2.14) приближенно представляется в виде

$$\frac{b}{l} = \frac{4\epsilon}{\pi \sqrt{1 - 2\epsilon^2 \cos 2\varphi + \epsilon^4}}. \quad (5.2.15)$$

Для изолированной пластинки ( $\epsilon = 0$ ) из (5.2.9) и (5.2.15) получим формулу для циркуляции

$$\Gamma_0 = -\pi b v_\infty \sin \alpha_\infty. \quad (5.2.16)$$

Из формул (5.2.11), (5.2.15), (5.2.16) найдем, наконец, как отличается подъемная сила профиля в решетке от подъемной силы изолированного профиля при равных углах атаки и скоростях невозмущенного потока:

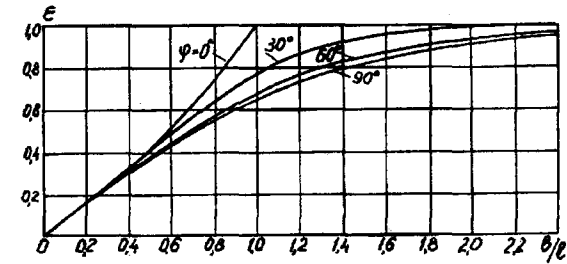


Рис. 5.2.4

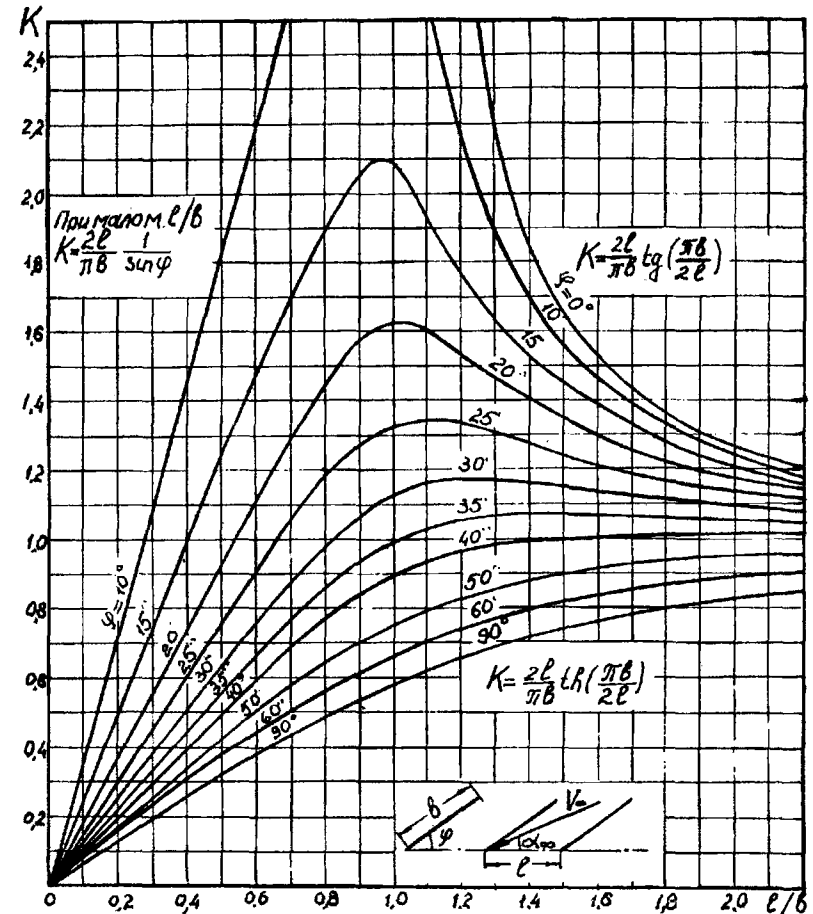


Рис. 5.2.5

$$K = \frac{C_y}{C_{y_0}} = \frac{4\epsilon l}{\pi b} \frac{1}{\sqrt{1 - 2\epsilon^2 \cos 2\varphi + \epsilon^4}}. \quad (5.2.17)$$

Решая совместно уравнения (5.2.14) и (5.2.17), найдем  $\epsilon$  и  $K$  для заданного шага решетки  $\frac{l}{b}$ . В явном виде решение может быть получено только для частных случаев  $\varphi = 0$  и  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ . Замечательно, что  $K$  не зависит от параметров невозмущенного потока.

На рис. 5.2.5 представлена зависимость  $K\left(\frac{l}{b}, \varphi\right)$ . При малых углах установки профилей в решетке ( $\varphi < 20^\circ$ ) и шаге, соизмеримом с хордой ( $0,6 < \frac{l}{b} < 1,4$ ), подъемная сила профилей в решетке резко нарастает. Это можно объяснить тем, что перед решеткой из-за индуктивного сроса потока резко нарастает угол атаки  $\alpha_1$ , что ведет к повышению  $C_y$  профиля в решетке. Следует иметь в виду, что в рассмотренной теории мы исходим из предположения безотрывного обтекания профилей решетки, которое в реальных условиях может и не выполняться. Поэтому в практических расчетах рекомендуется ограничить максимальное значение  $K$  величиной 1,5.

Для профилей с относительной толщиной  $\bar{c} = c/b$  при вычислении относительного шага решетки следует принять эквивалентную хорду  $b_{\text{экр}} = b(1 + c)$  [9].

### 5.3. Влияние зазора и числа лопастей на аэродинамические характеристики винта в канале

Рассматривается воздушный винт, установленный в канале с любым зазором  $\delta$  между концами лопастей и стенками канала (рис. 5.3.1). Предполагается, что винт имеет произвольное число лопастей, с каждой из которых сходит свободная вихревая пелена, перемещающаяся вниз под действием воздушного потока, вызванного подсасывающим действием винта и скоростью движения системы «винт в кольце». Предполагается также, что канал цилиндрический, бесконечной протяженности, струя не претерпевает поджатия, поэтому вихревые элементы, сходящие с задних кромок лопастей, на каждом радиусе движутся вниз с постоянной скоростью. Это соответствует вихревой схеме, когда вихревые линии следа накручиваются на некоторые цилиндрические поверхности с определенным шагом  $h$ . В общем случае каждому радиусу  $r$  может соответствовать свой шаг вихревых линий.

Чем меньше зазор между лопастями и стенками канала, тем ближе к действительности принятая схема. При очень больших зазорах приходим к схеме изолированного винта, у которого вихревой след претерпевает поджатие. Однако общепринятое допущение о квазилинейности вихревого следа позволяет распространить принятую вихревую схему и на случай изолированного винта при стремлении зазора к бесконечности.

Исследуем влияние зазора и числа лопастей на аэродинамические характеристики винта применительно к оптимальному винту. Под оптимальным понимается винт, который при заданной тяге потребляет минимальную мощность. Ниже рассматривается малонагруженный идеальный винт в несжимаемой жидкости.

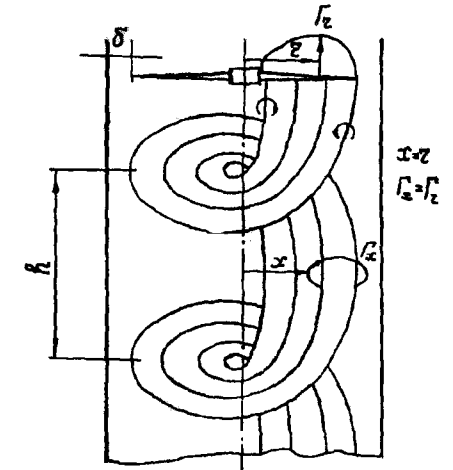


Рис. 5.3.1

Определим форму вихревой пелены оптимального винта, работающего в канале, и исследуем фактор потери циркуляции на конце лопасти в зависимости от зазора. Полученный результат можно рассматривать как обобщение теории оптимального винта Бетца с дополнениями Прандтля на случай работы винта в присутствии стенок канала. Результат для изолированного винта, как будет показано ниже, получается предельным переходом при  $\delta \rightarrow \infty$ .

Вырежем двумя сечениями на радиусе  $r$  элемент лопасти длиной  $dr$  (рис. 5.3.2). В относительном движении на элемент лопасти под углом притекания  $\beta$  набегаем возмущенный поток со скоростью  $W_1$ , являющейся векторной суммой скорости осевого потока  $V$ , окружной скорости  $\omega r$  и индуктивной скорости от винта  $w_1$ . Последняя раскладывается на осевую  $v_1$  и окружную  $u_1$  компоненты. Примем  $V_1 = V + v_1$ ,  $U_1 = \omega r - u_1$ . Сам осевой поток  $V(r)$  в плоскости винта можно рассматривать как сумму скорости движения винта и индуктивной скорости от стенок канала.

Из соотношения сил на элементе следует (см. рис. 5.3.2)



$$dM = r dQ = r dT \operatorname{tg} \beta = h(r) dT / 2\pi, \quad L = \omega k_{\pi} \int dM.$$

Минимизируя интеграл мощности  $L$  при заданном значении интеграла тяги  $T$ , находим оптимальное распределение нагрузки  $dT/dr$ , которому будет соответствовать условие (рис. 5.3.3)

$$h(r) = 2\pi r \operatorname{tg} \beta = 2\pi r V_1 / U_1 = (V + v_0) 2\pi / \omega = \text{const.} \quad (5.3.1)$$

То есть все вихревые элементы следа относительно воздушной среды движутся с постоянной осевой скоростью  $v_0$ . Это значит, что вихревая пелена, так же, как и для свободного винта, представляет собой винтовую (геликоидальную) поверхность, движущуюся за винтом без деформаций как жесткое тело.

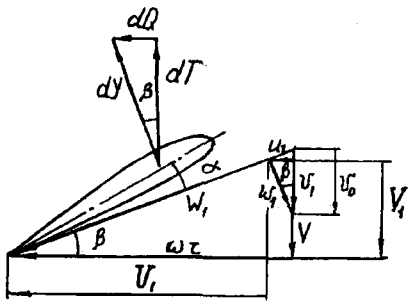


Рис. 5.3.2

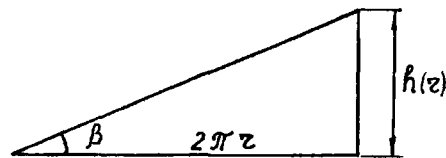


Рис. 5.3.3

Закон циркуляции  $\Gamma(r)$ , минимизирующий интеграл мощности, должен быть таким, чтобы движение вихревой пелены внутри канала под действием возбуждаемой ею индукции, удовлетворяло условию (5.3.1). В этом состоит основная трудность задачи. По сравнению со свободным винтом оптимальный закон  $\Gamma(r)$  будет зависеть не только от осевого потока  $V$ , нагрузки  $C_T$ , числа лопастей  $k_{\pi}$ , но и от зазора  $\delta$  между концами лопастей и стенками канала.

В практике аэродинамических расчетов винта задачу упрощают. Сначала определяется оптимальный закон  $\Gamma(r)$  для винта с бесконечным числом лопастей на основе дисковой вихревой теории [17]. Затем для винта с конечным числом лопастей находится некоторая функция

\* Подробнее об этом см. [17].

$f_r(r)$ , поправляющая найденный по дисковой теории закон циркуляции  $\Gamma(r)$  в концевых сечениях винта. В случае винта в канале для нахождения функции  $f_r(r)$  как фактора, учитывающего концевые потери циркуляции (или тяги) винта с конечным числом лопастей, будем использовать прием Прандтля.

Вихревая теория свободного воздушного винта (пропеллера) с конечным числом лопастей для режимов осевого обтекания винта в общем случае была разработана Гольдштейном [3]. В тех случаях, когда угол наклона вихревых поверхностей в периферийных участках пелены невелик ( $\beta < 15^\circ$ ) и мало относительное расстояние между ними ( $\bar{s} < 0,2$ ) (рис. 5.3.4), схема вихревого следа может быть сильно упрощена путем замены осесимметричного течения двумерным. Тогда свободные вихревые поверхности представляются в виде бесконечной последовательности плоских жестких вихревых слоев, движущихся со скоростью  $v_0$ , внутренний край которых уходит в бесконечность. В относительном движении поверхности неподвижны, а внешний поток обтекает их внешние кромки (рис. 5.3.5).

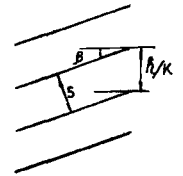


Рис. 5.3.4

Переход от пространственной к плоской картине течения соответствует рассмотрению обтекания внешних кромок исходных геликоидальных вихревых поверхностей, которое при сделанных допущениях будет близко к действительному. Такой подход был применен Прандтлем к свободному винту. Распространяя этот подход на движение плоских вихревых слоев вблизи неподвижной стенки, можно получить решение для винта в канале.

Течение в зазоре вызывается бесконечной последовательностью вихревых поверхностей, циркуляция скорости на каждой из которых будет  $\Gamma = v_0 s$ . На стенке канала выполняется граничное условие непротекания  $v_x = 0$ , а компонента  $v_y$  на шаге  $s$  меняется от минимального значения  $v_s$  на середине между вихревыми слоями (точки  $D$  и  $E$ ) до максимального  $v_\delta$  в плоскости вихревой поверхности (точка  $F$ ). Течение снаружи канала происходит с постоянной скоростью  $v_0$  так, что на наружной стенке канала скорость равна  $v_0$  и тогда циркуляция на отрезке  $DE$ , как и у свободного винта, будет  $\Gamma = v_0 s$ . В соответствии с теоремой Стокса такая же циркуляция скорости будет для любой линии тока  $mnk$  на шаге  $s$  внутри канала. Отсюда, в частности, следует, что средняя скорость на внутренней стенке канала равна  $v_0$ , а на самой стенке имеет место разрыв скоростей или вихревой слой, вы-

зываются дополнительным течением внутри канала с ускорением потока в зазоре и замедлением между вихревыми слоями.

Применив метод Жуковского, выполним конформное отображение физической плоскости  $z$  на плоскость  $t = \omega - i\pi/2$ , где  $\omega = \ln(c/v)$ . В качестве постоянной  $c$  выберем среднегеометрическую скорость на стенке  $c = \sqrt{v_\delta v_s}$ . Тогда

$$t = \ln \frac{\sqrt{v_\delta v_s}}{v} - i \frac{\pi}{2} = - \ln \frac{|v| e^{-i\theta}}{\sqrt{v_\delta v_s}} - i \frac{\pi}{2} = - \ln \frac{|v|}{\sqrt{v_\delta v_s}} + i \left( \theta - \frac{\pi}{2} \right). \quad (5.3.2)$$

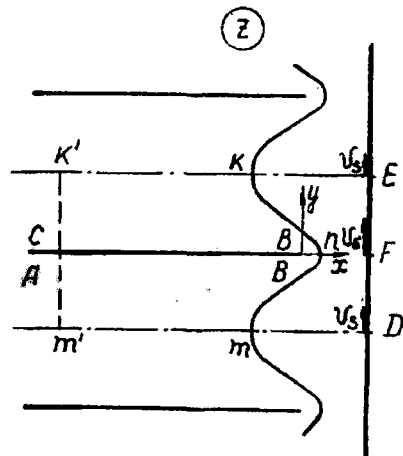


Рис. 5.3.5

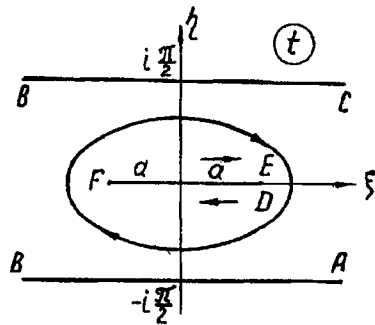


Рис. 5.3.6

Характерные точки плоскости  $z$  (рис. 5.3.5) переходят в соответствующие характерные точки плоскости  $t$  (рис. 5.3.6). Линия тока  $mnk$  на одном шаге  $s$  переходит в замкнутую кривую, охватывающую отрезок  $FE$ . Циркуляция по любой такой линии равна  $\Gamma$ . Отсюда течение в плоскости  $t$  соответствует циркуляционному обтеканию плоской пластинки, расположенной посередине между двумя стенками. Ширина пластинки  $2a$  равна длине отрезка  $FE$ :

$$a = \ln \sqrt{\frac{v_\delta}{v_s}} = \frac{1}{2} \ln \frac{v_\delta}{v_s}. \quad (5.3.3)$$

Один обход отрезка  $FE$  по линии тока в плоскости  $t$  соответствует движению по линии тока на одном шаге в плоскости  $z$ . Переход на следующий шаг соответствует переходу на следующий лист римановой поверхности через разрез  $FE$ . Таким образом, обеспечивается однозначность конформного отображения  $z$  на  $t$ .

Для нахождения течения в плоскости  $t$  используем решение Седова для циркуляционного обтекания плоской пластинки шириной  $2a$ , расположенной между двумя параллельными стенками. Комплексная скорость такого течения будет

$$\frac{dw}{dt} = v_t = - \frac{iK\Gamma}{\sqrt{\text{sh}^2 t - \text{sh}^2 a}}. \quad (5.3.4)$$

Здесь  $K$  — постоянная. На верхней и нижней стенках  $t = \xi \pm i\pi/2$ , и тогда

$$v_t = \mp \frac{K\Gamma}{\sqrt{\text{ch}^2 \xi + \text{sh}^2 a}}.$$

При любых  $\xi \geq 0$  течение соответствует  $\Gamma < 0$ , следовательно,  $K > 0$ . На пластинке  $t = \xi$ ,  $v_t = \pm v_\xi$ ,  $\gamma = -2|v_\xi|$ . Отсюда

$$-\Gamma = \int_{-a}^{+a} \gamma d\xi = -4 \int_0^a |v_\xi| d\xi = -4K\Gamma \int_0^a \frac{d\xi}{\sqrt{\text{sh}^2 a - \text{sh}^2 \xi}}.$$

Выполнив интегрирование, получим

$$K = \text{cha} / 4K (\text{th} a). \quad (5.3.5)$$

Подставим сюда  $a$  из (5.3.3). Тогда

$$K = \frac{v_\delta + v_s}{8 \sqrt{v_\delta v_s} K(k)}, \quad k = \frac{v_\delta - v_s}{v_\delta + v_s}, \quad (5.3.6)$$

где  $K(k)$  — полный эллиптический интеграл второго рода с модулем  $k$ .

Сделаем переход из плоскости  $t$  в плоскость годографа скоростей  $v$ , используя отображающую функцию (5.3.2):

$$\frac{dw}{dv} = \frac{dw}{dt} \frac{dt}{dv} = - \frac{1}{v} \frac{dw}{dt}.$$

Подставим в (5.3.4) формулы (5.3.2), (5.3.3) и  $\Gamma = v_0 s$ . После преобразований получим

$$\frac{dw}{dv} = \frac{v_0 s (v_\delta + v_s)}{4 K(k) \sqrt{(v^2 + v_\delta^2)(v^2 + v_s^2)}}.$$

Найдем теперь связь между плоскостью годографа скоростей и физической плоскостью  $z$ :

$$v = \frac{dw}{dz}, \quad dz = \frac{1}{v} dw, \quad z = \int_0^z dz = \int_\infty^v \frac{1}{v} \frac{dw}{dv} dv = \frac{1}{2} \int_\infty^v \frac{1}{v^2} \frac{dw}{dv} d(v^2).$$

Выполнив интегрирование, окончательно имеем

$$z = \frac{v_0 s (v_\delta + v_s)}{4 v_\delta v_s K(k)} \ln \frac{v (v_\delta + v_s)}{v_s \sqrt{(v^2 + v_\delta^2)} + v_\delta \sqrt{(v^2 + v_s^2)}}. \quad (5.3.7)$$

Скорости  $v_\delta$  и  $v_s$  получим по формуле (5.3.7) из граничных условий. Положив  $z = \delta$ ,  $v = i v_\delta$ ,  $v^2 = -v_\delta^2$  и  $z = \delta + is/2$ ,  $v = i v_s$ ,  $v^2 = -v_s^2$ , найдем

$$v_\delta = \pi v_0 / [2(1-k)K(k)], \quad v_s = \pi v_0 / [2(1+k)K(k)], \quad (5.3.8)$$

где

$$k = e^{-2\pi\delta/s}. \quad (5.3.9)$$

Как видим, относительные скорости  $v_\delta/v_0$  и  $v_s/v_0$  в элементарных функциях не выражаются и зависят от отношения зазора к шагу вихревых поверхностей  $\delta/s$ . На рис. 5.3.7 представлены характерные скорости на стенке в зависимости от параметра  $\delta/s$ , откуда видно, что  $v_\delta$ , характеризующая скорость перетекания воздуха в зазоре, сильно растет с уменьшением зазора  $\delta$  и увеличением шага  $s$ , а скорость течения между вихревыми поверхностями уменьшается.

Подставив (5.3.8) в (5.3.7) и решив полученное уравнение относительно комплексной скорости  $v$ , получим

$$v = v_x - i v_y = v_0 c / \sqrt{(e^{-2\pi z/s} - 1)(1 - e^{2\pi(z-2\delta)/s})}, \quad (5.3.10)$$

где

$$c = \pi/2 K(k). \quad (5.3.11)$$

При  $\delta \rightarrow 0$  имеем  $K(1) \rightarrow \infty$ ,  $c \rightarrow 0$ ; при  $\delta \rightarrow \infty$  имеем  $K(0) \rightarrow \pi/2$ ,  $c \rightarrow 1$ . Таким образом, при  $\delta = 0$  будет  $v = 0$ , то есть в

относительном движении жидкость между вихревыми поверхностями покоится, в абсолютном — движется вместе с ними как твердое тело. При  $\delta \rightarrow \infty$  формула (5.3.10) обращается в формулу Прандтля для свободного вента:

$$v = v_0 / \sqrt{e^{-2\pi z/s} - 1}.$$

Вычислим теперь скорость на стенке канала при  $z = \delta + iy$ . Из (5.3.10) и (5.3.11) найдем

$$v_x = 0, \quad v_y = v_0 c / \sqrt{(1 - e^{-2\pi\delta/s})(2 \cos(2\pi y/s) - e^{-2\pi\delta/s})}. \quad (5.3.12)$$

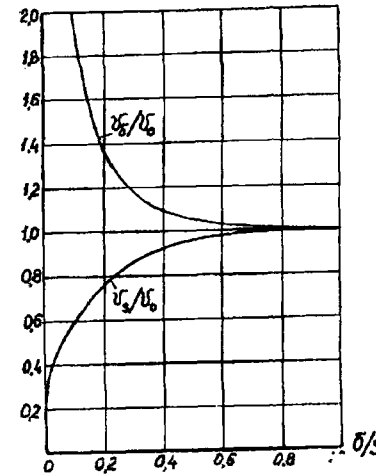


Рис. 5.3.7

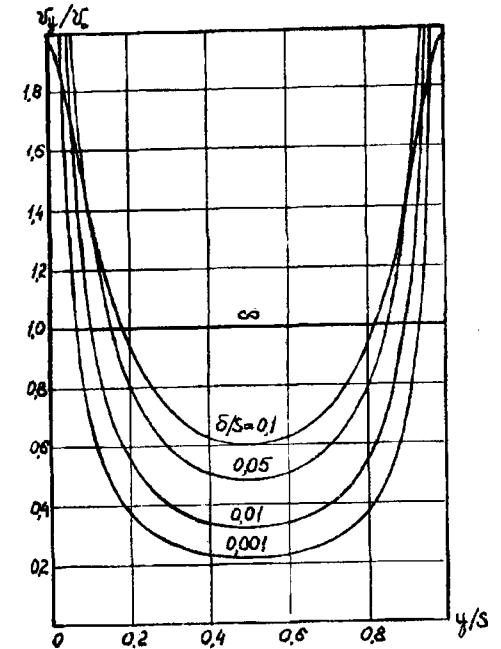


Рис. 5.3.8

На рис. 5.3.8 представлена графически зависимость  $v_y(\delta/s)$ . Как видим, с уменьшением относительного зазора скорости на стенке канала сильно растут, а следовательно, растет и разрежение. Избыточные давления на стенках канала могут быть найдены по уравнению Бернулли

$$\Delta p_{\max} = p - p_a = -\frac{1}{2} \rho v_\delta^2; \quad \Delta p_{\min} = -\frac{1}{2} \rho v_s^2.$$

Таким образом, стенки канала под винтом испытывают значительные динамические воздушные нагрузки. Следует иметь в виду, что формулы для скоростей и давлений получены для несжимаемой жидкости. При очень малых зазорах их точность уменьшается.

Скорость на внешней кромке вихревой поверхности при  $z = 0$  равна бесконечности. Скорости на самих вихревых поверхностях получаются при  $x < 0, y = 0$  (сверху),  $y = s$  (снизу).

Выполнив соответствующие подстановки в формулу (5.3.10), найдем

$$v = v_x = \mp \frac{v_0 \pi e^{2\pi \delta/s}}{2K(e^{-2\pi \delta/s})} \frac{e^{-\pi |x|/s}}{\sqrt{(e^{4\pi \delta/s} - e^{-2\pi |x|/s})(1 - e^{-2\pi |x|/s})}}. \quad (5.3.13)$$

Нетрудно показать, что формула (5.3.10) за стенкой дает зеркально отраженное течение. Комплексный потенциал течения в элементарных функциях не выражается. Однако на самой поверхности  $z = x, x < 0$  он принимает действительные значения, поскольку здесь  $\Psi = 0$ . Циркуляция по контуру, охватывающему часть вихревой поверхности от внешней кромки до координаты  $-x$ , равна скачку потенциала в этой точке  $2|\varphi_x|$  при переходе через слой. Эта же циркуляция может быть найдена интегрированием по длине вихревого слоя погонной циркуляции  $\gamma = 2|v_x|$ :

$$\Gamma_x = 2|\varphi_x| = \int_0^{-x} \gamma dx = 2 \int_0^{-x} |v_x| dx.$$

Подставим сюда формулу (5.3.13). Тогда после интегрирования получим

$$\Gamma_x = f_\Gamma \Gamma, \quad (5.3.14)$$

где  $f_\Gamma$  — фактор, учитывающий падение циркуляции на конце лопасти для винта с конечным числом лопастей:

$$f_\Gamma = 1 - \frac{F(\arcsin e^{-\pi |x|/s}, e^{-2\pi \delta/s})}{K(e^{-2\pi \delta/s})}, \quad (5.3.15)$$

где  $K$  и  $F$  — полный и неполный эллиптические интегралы первого рода.

При  $\delta \rightarrow \infty$   $K \rightarrow \frac{\pi}{2}$ ,  $F \rightarrow \arcsin e^{-\pi |x|/s}$ , и тогда получим известную формулу Прандтля для свободного винта:

$$f_\Gamma = (2/\pi) \arccos e^{-\pi |x|/s}. \quad (5.3.16)$$

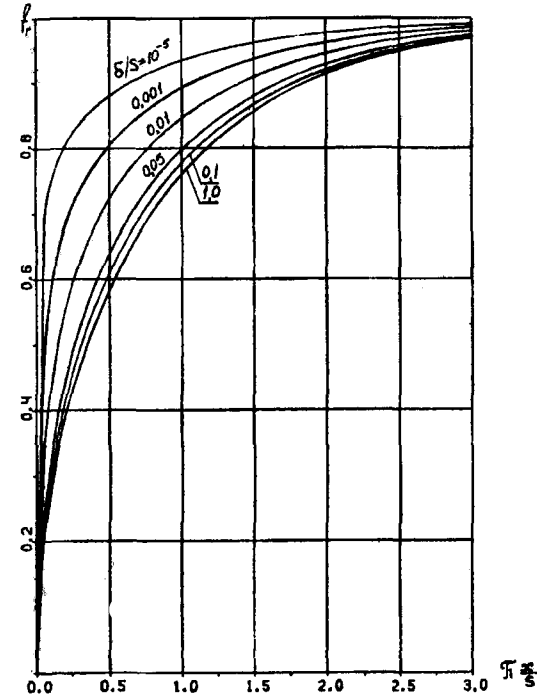


Рис. 5.3.9

На рис. 5.3.9 представлены кривые  $f_\Gamma$  в функции от параметра  $\pi x/s$  для различных значений  $\delta/s$ . Как видим, даже очень малые зазоры между концами лопастей и стенкой канала приводят к заметному падению нагрузки (циркуляции) на конце лопасти. Коэффициент  $f_\Gamma$ , учитывающий влияние числа лопастей винта  $k_d$  и зазора  $\delta$  на концевые потери винта, вводится в расчет в соответствии с формулой (5.3.14) как поправочный коэффициент на циркуляцию, найденную по дисковой теории винта.

Заметим, что кривые  $f_{\Gamma}$  на рис. 5.3.9 отражают потребную для оптимального винта «закругленность» концов лопастей. Как видим, с уменьшением зазора степень потребной «закругленности» падает. При малых относительных зазорах обычно делают прямые срезы концов лопастей.

Параметры  $\pi x/s$  и  $2\pi \sigma/s$  находятся по Прандтлю так же, как для свободного винта [17]:

$$\pi x/s = k_{\Gamma} (R - r) / 2r \sin \beta, \quad 2\pi \delta/s = \delta k_{\Gamma} / r \sin \beta. \quad (5.3.17)$$

Найденный закон  $f_{\Gamma}$  отражает оптимальный закон распределения циркуляции скорости на конце лопасти, на основе которого может проектироваться оптимальный винт в канале.

В приближенных расчетах винтов применяют упрощенный метод учета концевых потерь, предложенный Прандтлем [17]. Если винт с конечным числом лопастей рассчитывать по дисковой теории, то падение тяги на конце лопасти можно учесть, сделав переход к эквивалентному винту меньшего радиуса, потребляющего ту же мощность, что и исходный винт. Это уменьшение радиуса учитывается с помощью коэффициента  $B$ , который находится с учетом следующих соображений. Если зазор между концами лопастей и стенкой канала отсутствует или винт имеет большое число лопастей, то вся масса воздуха, закрученная между вихревыми поверхностями в следе, перемещается вниз со скоростью  $v_0$ . При наличии зазора часть воздуха перетекает снизу вверх, обтекая кромки вихревых поверхностей в зазоре с относительной скоростью  $v - v_0$ , уменьшая тем самым количество движения уходящей струи. Применяв такой подход, окончательно получим

$$B = 1 + \bar{\delta} - \frac{\bar{s} K(k)}{4 K(\sqrt{1 - k^2})}, \quad k = e^{-2\pi \delta/s}, \quad (5.3.18)$$

где  $\bar{\delta}$  — относительный зазор, взятый в долях от радиуса винта. Сделав предельный переход к свободному винту при  $\bar{\delta} \rightarrow \infty$ , получим известную формулу Прандтля:

$$B = 1 - \frac{\bar{s}}{\pi} \ln 2. \quad (5.3.19)$$

На рис. 5.3.10 приведены кривые коэффициента  $B$  в зависимости от относительного шага вихревых поверхностей в следе  $\bar{s} \approx 2\pi V_1/k_{\Gamma}$  и относительного зазора  $\bar{\delta}$ . Из графика видно, что наиболее сильная чувствительность к потере тяги наблюдается при очень малых зазорах.

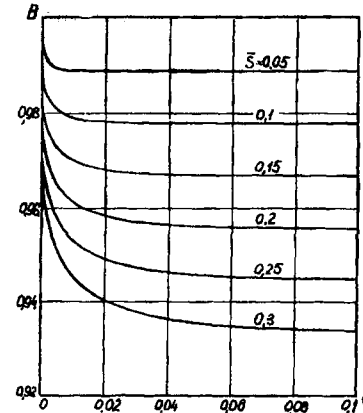


Рис. 5.3.10

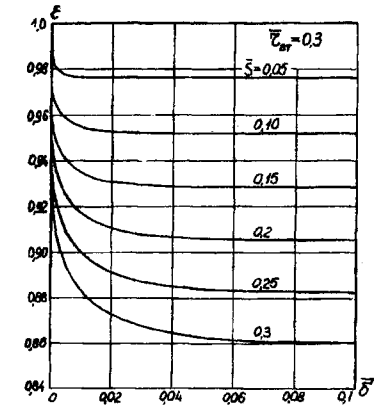


Рис. 5.3.11

Для примера с помощью формулы (5.3.18) можно оценить потери тяги (напора) вентилятора НЕЖ ( $\Gamma(r) = \text{const}$ ), установленного в канале с зазором и без зазора:

$$\epsilon = \frac{T_{\delta}}{T_0} = \frac{p_{\delta}}{p_0} = \frac{B^2 - \bar{r}_0^2}{1 - \bar{r}_0^2}, \quad (5.3.20)$$

где  $\bar{r}_0$  — относительный размер втулки.

На рис. 5.3.11 представлены результаты расчетов  $\epsilon(\bar{\delta}, \bar{s})$  для  $\bar{r}_0 = 0,3$ . Как видим, наиболее резкое падение напора наблюдается в интервале малых относительных зазоров (0,5...1%).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Аржаников Н.С., Мальцев В.Н. Аэродинамика. — М.: Оборонгиз, 1956.
2. Александров В.Л. Воздушные винты. — М.: Оборонгиз, 1951.
3. Ветчинкин В.П., Поляков Н.Н. Теория и расчет воздушного гребного винта. — М.: Оборонгиз, 1940.
4. Идельчик И.Е. Справочник по гидравлическим сопротивлениям. — М.: Госэнергоиздат, 1960.
5. Калинушкин М.П. Вентиляторные установки. — М.: Высшая школа, 1967.

6. Курочкин Ф.П. Основы проектирования самолетов с вертикальным взлетом и посадкой. — М.: Машиностроение, 1970.
7. Кохеман Д., Вебер И. Аэродинамика авиационных двигателей. — М.: ИИЛ, 1956.
8. Седов Л.И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. — М.: Наука, 1966.
9. Симонов Л.А. Потенциальные течения в решетках профилей // Тр. ЦАГИ, 1948.
10. Ханжонков В.И. Аэродинамические характеристики коллекторов. Сер. Промышленная аэродинамика. — М.: БНИ ЦАГИ, 1953, № 4.
11. Ханжонков В.И. Аэродинамика аппаратов на воздушной подушке. — М.: Машиностроение, 1972.
12. Шайдаков В.И. Аэродинамические исследования системы «винт в кольце» на режиме висения // Исследования в области теоретической и прикладной аэрогидродинамики. — М.: Оборонгиз, 1959.
13. Шайдаков В.И. Влияние глубины расположения винта в кольце на аэродинамические характеристики системы для режима работы на месте // Изв. высших учебных заведений. Сер. Авиационная техника, 1960, № 2.
14. Шайдаков В.И., Завалов О.А. Аэродинамическое проектирование фенестрона. — М.: МАИ, 1980.
15. Шайдаков В.И. Аэродинамический расчет вертолета. — М.: МАИ, 1988.
16. Шайдаков В.И. Оптимальный воздушный винт в канале // Тр. четвертых научных чтений, посвященных памяти Б.Н. Юрьева (23 — 24 апреля 1992 г.): Теоретические основы вертолетостроения, теоретическая и экспериментальная аэродинамика. — М.: Изд-во МАИ, 1994.
17. Шайдаков В.И., Маслов А.Д. Аэродинамическое проектирование лопастей воздушного винта. — М.: Изд-во МАИ, 1995.
18. Шайдаков В.И. Исследование свойств цилиндрического вихревого слоя: Аэродинамика вертолета // Труды МАИ, вып. 251, 1972.
19. Юрьев Б.Н. Вихревая теория винта. Избр. труды. Т. 1. — М.: АН СССР, 1961.
20. Юрьев Б.Н. Аэродинамический расчет вертолета. — М.: Оборонгиз, 1956.

---

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение .....	3
1. Основные уравнения динамики жидкости .....	4
2. Теория идеального винта в кольце .....	22
3. Теория винта, работающего в канале .....	39
4. Аэродинамика системы «винт в кольце» в условиях косо́й обдувки .....	56
5. Методы конформных отображений в теории системы «винт в кольце» ..	66
Литература .....	88

## ИСПРАВЛЕНИЯ И ОПЕЧАТКИ

Страница	Строка	Напечатано	Должно быть
49	4 св.	$J_V = 1 + \frac{J_V \xi u}{\sqrt{\kappa}} \left(1 - \bar{V}/\bar{V}_1\right)$	$J_V = \frac{V}{V_1} + \frac{J_V \xi u}{\sqrt{\kappa}} \left(1 - \bar{V}/\bar{V}_1\right)$
49	6 св.	Коэффициенты $k_T, k_p, J_V$	Коэффициенты $k_T, k_p, J_v$
81	7 сн.	где $K(k)$ - полный эллиптический интеграл второго рода с модулем $k$ .	где $K(k)$ - полный эллиптический интеграл первого рода с модулем $k$ .
86	9 сн.	$B = 1 + \bar{\delta} - \frac{\bar{s}K(k)}{4K(\sqrt{1-k^2})}$	$B = 1 + \bar{\delta} - \frac{\bar{s}K(\sqrt{1-k^2})}{4K(k)}$